Sistem Persamaan Linear Dua Variabel SPLDV

Harga 3 buku tulis dan 4 pensil adalah Rp13.200,00, sedangkan harga 5 buku tulis dan 2 pensil adalah Rp15.000,00. Dapatkah kamu menghitung harga satuan untuk buku tulis dan pensil tersebut? Permasalahan-permasalahan aritmetika sosial seperti ini dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV). Mengapa harus dua variabel? Perhatikan bahwa contoh kasus tersebut melibatkan dua macam variabel yang belum diketahui nilainya, yaitu harga satuan buku tulis dan harga satuan pensil. Untuk dapat mengetahui harga-harganya, kamu dapat menggunakan pemisalan untuk harga satuan buku tulis dan harga satuan pensil. Misalkan, harga satuan buku tulis adalah x dan harga satuan pensil adalah y. Jadi, contoh kasus tersebut dapat ditulis dalam bentuk model matematika sebagai berikut.

$$3x + 4y = 13.200$$
$$5x + 2y = 15.000$$

Dengan menggunakan metode penyelesaian SPLDV, kamu dapat mengetahui nilai x dan y. Berikut ini akan diuraikan konsep dasar SPLDV serta metode-metode penyelesaian yang dapat digunakan.

A. Pengertian SPLDV

Untuk memahami pengertian dan konsep dasar SPLDV, ada baiknya mengulang kembali materi tentang persamaan linear satu variabel. Pelajarilah uraian berikut secara saksama.

1. Persamaan Linear Satu Variabel

Di Kelas VII, kamu telah mempelajari materi tentang persamaan linear satu variabel. Masih ingatkah kamu apa yang dimaksud dengan persamaan linear satu variabel? Coba kamu perhatikan bentuk-bentuk persamaan berikut.

$x + 5 = 6$	$6 + 7p = 20$
$4x + 3 = 9$	$2r = 3 + 9$
$12 + y = 14$	$8p + 6 = 24$

Bentuk-bentuk persamaan tersebut memiliki satu variabel yang belum diketahui nilainya. Bentuk persamaan seperti inilah yang dimaksud dengan linear satu variabel. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.1 secara seksama.

Contoh Soal 4.1

Dari bentuk-bentuk persamaan berikut, apakah persamaan tersebut termasuk persamaan linear satu variabel atau bukan.

1. $5y - t\,3 = 12$
2. $23 + x = 30$
3. $4p + 6 = 18$
4. $18 - 3x = 12$
5. $20 + 5x = 35$

Jawab:

1. Persamaan $5y - 3 = 12$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan varibel y.
2. Pesamaan $23 + x = 30$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan varibel x.
3. Persamaan $4p + 6 = 18$ merupakan persamaan linear satu variabel linear satu variabel dengan variabel p.
4. Persamaan $18 - 3x = 12$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan variabel x.
5. Persamaan $20 + 5x$ merupakan persamaan linear satu variabel dengan variabel x.

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, untuk penyelesaian dari persamaan linear satu variabel dapat digunakan beberapa cara. Salah satu di antaranya dengan sifat kesamaan. Perhatikan uraian persamaan berikut.

$4p + 5 = 17$

Menentukan nilai p pada persamaan linear satu variabel sebagai berikut.

$4p + 5 = 17$ (tulis kembali soal yang dimaksud)

$4p + 5 - 5 = 17 - 5$ (kedua ruas dikurangi 5)

$4p = 12$

$\frac{4p}{4} = \frac{12}{4}$ (kedua ruas dibagi 4)

$p = 3$

Jadi, diperoleh nilai $p = 3$ dan himpunan penyelesaian, Hp = {3}

$3x + 2 = 2x + 6$

Menentukan nilai x pada persamaan linear satu variabel gunakan cara berikut.

$3x + 2 = 2x + 6$ (tulis kembali soal yang dimaksud)

$3x + 2 - 2 = 2x + 6 - 2$ (kedua ruas dikurangi 2)

$3x = 2x + 4$

$3x - 2x = 2x + 4 - 2x$ (kedua ruas dikurangi $2x$)

$x = 4$

Jadi, diperoleh nilai x = 4 dan himpunan penyelesaian, Hp = {4}. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.2 berikut.

Contoh Soal 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan linear satu variabel berikut.

1. $4y - 3 = 5$
2. $2p + 5 = 17$
3. $12 - 3r = 3$
4. $6x + 2 = 11 + 3x$
5. $4 - 3b = 2b - 16$

Jawab:

1. $4y - 3 = 5$

$$\begin{aligned} 4y - 3 + 3 &= 5 + 3 \\ 4y &= 8 \\ \frac{4p}{4} &= \frac{8}{4} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $y = 2$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {2}

2. $2p + 5 = 17$

$$\begin{aligned} 2p + 5 - 5 &= 17 - 5 \\ 2p &= 12 \\ \frac{2y}{2} &= \frac{12}{2} \\ p &= 6 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $p = 6$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {6}

3. $12 - 3r = 3$

$$\begin{aligned} 12 - 3r - 12 &= 3 - 12 \\ -3r &= -9 \\ 3r &= 9 \\ \frac{3r}{3} &= \frac{9}{3} \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $r = 3$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {3}

4. $6x + 2 = 11 + 3x$

$$\begin{aligned} 6x + 2 - 3x &= 11 + 3x - 3x \\ 3x + 2 &= 11 \\ 3x + 2 - 2 &= 11 - 2 \\ 3x &= 9 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $x = 3$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {3}

5. $4 - 3b = 2b - 16$

$$\begin{aligned} 4 - 3b - 2b &= 2b - 16 - 2b \\ 4 - 5b &= -16 \\ 4 - 5b - 4 &= -16 - 4 \\ -5b &= -20 \\ 5b &= 20 \\ \frac{5b}{5} &= \frac{20}{5} \\ \mathrm{b} &= 4 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $b = 4$ dan himpunan penyelesaiannya, Hp = {4}

2. Persamaan Linear Dua Variabel

Kamu telah mempelajari dan memahami persamaan linear satu variabel. Materi tersebut akan membantu kamu untuk memahami persamaan linear dua variabel. Coba kamu perhatikan bentuk-bentuk persamaaan berikut.

$2x + 3y = 14$	$12m - n = 30$
$p + q + 3 = 10$	$r + 65 = 10$
$4a + 5b = b + 7$	$9z - 3v = 5$

Persamaan-persamaan tersebut memiliki dua variabel yang belum diketahui nilainya. Bentuk inilah yang dimaksud dengan persamaan linear dua variabel. Jadi, persamaan dua variabel adalah persamaan yang hanya memiliki dua variabel dan masing-masing variabel berpangkat satu. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.3 berikut.

Contoh Soal 4.3

Sebutkan masing-masing variabel dari persamaan linear dua variabel berikut ini.

1. $3x - y = 5$
2. $4x + 6y = 6$
3. $p - q = 1$
4. $7m - 2n = 4$
5. $3p + 3q = 9$

Jawab:

1. $3x - y = 5$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel x dan y.
2. $4x + 6y = 6$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel x dan y.
3. $p - q = 1$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel p dan q .
4. $7m - 2n = 4$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel m dan n.
5. $3p + 3q = 9$ merupakan persamaan linear dua variabel yaitu variabel p dan q.

Sekarang, bagaimana menentukan penyelesaian dan himpunan penyelesaian linear dua variabel? Penyelesaian persamaan linear dua variabel dapat ditentukan dengan cara mengganti kedua variabelnya dengan bilangan yang memenuhi persamaan linear tersebut. Hasilnya berupa koordinat yang memuat nilai x dan y.

Contoh Soal 4.4

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan linear dua variabel berikut. Kemudian gambarkan grafiknya.

1. $3x + y = 12$; $x, y \in$ bilangan asli
2. $x + 2y = 6$; $x, y \in$ bilangan cacah
3. $5x - y = 10$; $\in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{$bilangan asli$\}$

Jawab

1. Diketahui persamaan $3x + y = 12$; $x, y \in$ bilangan asli.
   - Tetapkan nilai $x = 1$ sehingga:
     $3x + y = 12$
     $3 \cdot 1 + y = 12$
     $3 + y = 12$
     $y = 9$
     Diperoleh $x = 1$ dan $y = 9$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (1, 9)$.
   - Ambil nilai $x = 2$ sehingga:
     $3x + y = 12$
     $3 \cdot 2 + y = 12$
     $6 + y = 12$
     $y = 6$
     Diperoleh $x = 2$ dan $y = 6$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (2, 6)$.
   - Tetapkan nilai x = 3, sehingga:
     $3x + y = 12$
     $3 \cdot 3 + y = 12$
     $9 + y = 12$
     $y = 3$
     Diperoleh $x = 3$ dan $y = 3$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (3, 3)$.

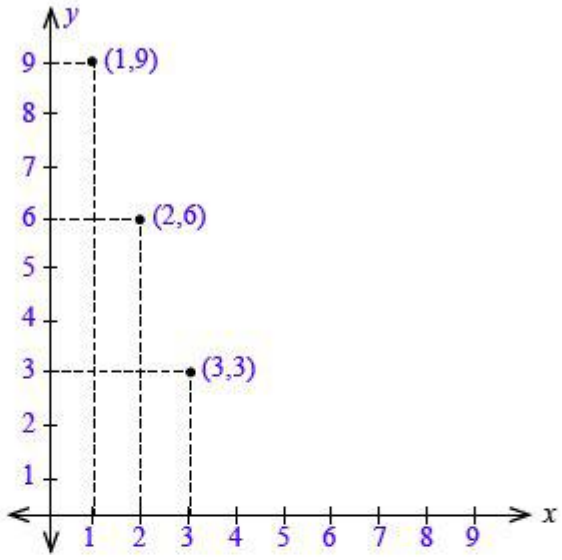
- Tetapkan nilai $x = 4$ maka:

$3x + y = 12$
$3 \cdot 4 + y = 12$
$12 + y = 12$
$y = 0$

Diperoleh $x = 4$ dan $y = 0$, nilai ini tidak memenuhi karena nilai y bukan anggota bilangan asli.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $3x + y = 12$ dengan x dan y anggota bilangan asli adalah: {(1,9), (2,6), (3,3)} atau Hp = {(1,9), (2,6), (3,3)}

Jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka diperoleh gambar berikut:



2. Diketahui persamaan $x + 2y = 6$ di mana $x, y \in$ bilangan cacah.
   - Tetapkan nilai $x = 0$ sehingga:

$x + 2y = 6$
$0 + 2y = 6$
$2y = 6$
$y = 3$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = 3$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (0, 3)$.

- Ambil nilai x =1 sehingga:

$x + 2y = 6$
$1 + 2y = 6$
$2y = 5$
$y = \frac{5}{2}$

Nilai $y = \frac{5}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

- Jika nilai $x = 2$ maka:

$x + 2y = 6$
$2 + 2y = 6$
$2y = 4$
$y = 2$

Diperoleh $x = 2$ dan $y = 2$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (2, 2)$.

• Jika nilai $x = 3$ maka:

$x + 2y = 6$
$3 + 2y = 6$
$2y = 3$
$y = \frac{3}{2}$

Nilai $y = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

- Jika nilai $x = 4$ maka:
  $x + 2y = 6$
  $4 + 2y = 6$
  $2y = 2$
  $y = 1$

Diperoleh $x = 4$ dan $y = 1$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (4, 1)$.

- Jika nilai $x = 5$ maka:
  $x + 2y = 6$
  $5 + 2y = 6$
  $2y = 1$
  $y = \frac{1}{2}$

Nilai $y = \frac{1}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

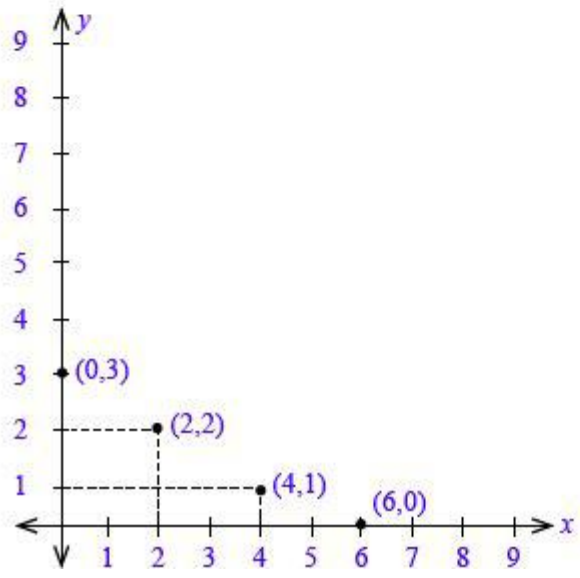
- Jika ditetapkan nilai $x = 6$ maka:
  $x + 2y = 6$
  $6 + 2y = 6$
  $2y = 0$
  $y = 0$

Diperoleh $x = 6$ dan $y = 0$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (6, 0)$.

- Jika nilai $x = 7$, maka:
  $x + 2y = 6$
  $7 + 2y = 6$
  $2y = -1$
  $y = -\frac{1}{2}$

Nilai $y = -\frac{1}{2}$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan cacah.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $x + 2y = 6$ dengan x dan y anggota bilangan cacah adalah $\{(0,3), (2,2), (4,1), (6,0)\}$.
Jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka diperoleh gambar berikut.



3. Diketahui persamaan $5x - y = 10$ di mana $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ dan $y \in \{\text{bilangan asli}\}$.
   - Jika dipilih nilai $x = 0$ dari yang diketahui maka:
     $5x - y = 10$
     $5 \cdot 0 - y = 10$
     $0 - y = 10$
     $y = -10$

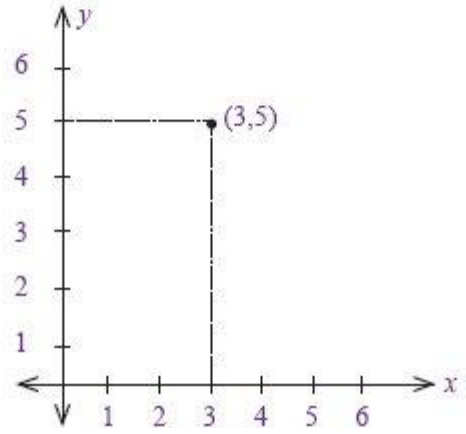
     Nilai $y = -10$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan asli.
   - Jika ditetapkan nilai $x = 1$ dari yang diketahui maka:
     $5x - y = 10$
     $5 \cdot 1 - y = 10$
     $5 - y = 10$
     $y = -5$

     Nilai $y = -5$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan asli.
   - Jika diambil nilai $x = 2$ dari yang diketahu maka:
     $5x - y = 10$
     $5 \cdot 2 - y = 10$
     $10 - y = 10$
     $y = 0$

     Nilai $y = 0$ tidak memenuhi syarat karena bukan anggota bilangan asli.
   - Sehungga untuk nilai x yang terakhir, yaitu = 3 maka:
     $5x - y = 10$
     $5 \cdot 3 - y = 10$
     $15 - y = 10$
     $y = 5$

     Diperoleh $x = 3$ dan $y = 5$ atau dapat dituliskan $(x,y) = (3, 5)$.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $5x - y = 10$ dengan $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ dan $y \in$ bilangan real adalah $\{(3, 5)\}$.
Jika digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius maka diperoleh gambar berikut.



3. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Coba kamu perhatikan bentuk-bentuk persamaan linear dua variabel berikut.

$2x + 3y = 8$	$4a + b = 8$
$x + y = 2$	$a - b = 1$
$p + 2q = 9$	$9c + f = 12$
$5p + q = 4$	$c - 3f = 2$
$3m - 2n = 1$	$k + l = 6$
$m + 3n = 5$	$2k + 2l = 12$

Dari uraian tersebut terlihat bahwa masing-masing memiliki dua buah persamaan linear dua variabel. Bentuk inilah yang dimaksud dengan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV). Berbeda dengan persamaan dua variabel, SPLDV memiliki penyelesaian atau himpunan penyelesaian yang harus memenuhi kedua persamaan linear dua variabel tersebut. Contoh, perhatikan sistem SPLDV berikut.

$$\left.\begin{matrix} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{matrix}\right\} \; x, y \in \text{bilangan cacah}$$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah mencari nilai-nilai x dan y yang dic ari demikian sehingga memenuhi kedua persamaan linear. Perhatikan Tabel 4.1 berikut ini.

Tabel 4.1 SPLDV

$2x + y = 6$	$x + y = 5$
$x = 0, y = 6$	$x = 0, y = 5$
$x = 1, y = 4$	$x = 1, y = 4$
$x = 2, y = 2$	$x = 2, y = 3$
$x = 3, y = 0$	$x = 3, y = 2$
....	$x = 4, y = 1$
....	$x = 5, y = 0$

Tabel 4.1 menjelaskan bahwa persamaan linear 2x + y = 6 memiliki 4 buah penyelesaian. Adapun persamaan linear x + y = 5 memiliki 6 buah penyelesaian. Manakah yang merupakan penyelesaian dari 2 x + y = 6 dan x + y = 5? Penyelesaian adalah nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan linear tersebut. Perhatikan dari Tabel 4. 1 nilai x = 1 dan y = 4 sama-sama
memenuhi penyelesaian dari kedua persamaan linear tersebut. Jadi, dapat dituliskan:

$$\left.\begin{matrix} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{matrix}\right\} \; \text{Hp} = \{(1,4)\}$$

Contoh Soal 4.5

Tentukan penyelesaian dari masing-masing persamaan dan penyelesaian dari SPLDV berikut ini.

1. $\left.\begin{matrix} 4x+y=8 \\ 2x+y=4 \end{matrix}\right\}$ $x, y \in$ bilangan cacah
2. $\left.\begin{matrix} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{matrix}\right\}$ $x, y \in$ bilangan cacah
3. $\left.\begin{matrix} 3x+y=6 \\ 2x+2y=4 \end{matrix}\right\}$ $x, y \in$ bilangan asli

Jawab:

1. Dari tabel berikut tampak bahwa persamaan $4x+y=8$ memiliki 3 penyelesaian dan persamaan $2x+y=4$ memiliki 3 penyelesaian, tapi, hanya ada satu penyelesaian yang memenuhi SPLDV tersebut, yaitu $x=2$ dan $y=0$. Dapat juga dituliskan Hp = {(2, 0)}.

$4x+y=8$	$2x+y=4$
$x=0, y=8$	$x=0, y=4$
$x=1, y=4$	$x=1, y=1$
$x=2, y=0$	$x=2, y=0$

2. Perhatikan tabel berikut

$x+y=3$	$x+2y=5$
$x=0, y=3$	$x=1, y=2$
$x=1, y=2$	$x=3, y=1$
$x=2, y=1$	$x=5, y=0$
$x=3, y=0$	–

Dari tabel tersebut tampak bahwa persamaan $x+y=3$ memiliki 4 penyelesaian. Adapun persamaan $x+2y=5$ memiliki 3 penyelesaian. Satu-satunya penyelesaian SPLDV tersebut adalah $x=1$ dan $y=2$. Jadi, Hp = {(1, 2)}.

3. Perhatikan tabel berikut.

$3x+y=6$	$2x+2y=4$
$x=1, y=3$	$x=1, y=1$
$x=2, y=0$	$x=2, y=0$

Dari tabel tersebut tampak bahwa persamaan $3x+y=6$ memiliki 2 penyelesaian dan persamaan $2x+2y=4$ memiliki 2 penyelesaian. Akan tetapi, penyelesaian yang memenuhi SPLDV adalah $x=2$ dan $y=0$. Jadi, Hp = {(2, 0)}

B. Penyelesaian SPLDV

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya, SPLDV adalah persamaan yang memiliki dua buah persamaan linear dua variabel. Penyelesaian SPLDV dapat ditentukan dengan cara mencari nilai variabel yang memenuhi kedua persamaan linear dua variabel tersebut. Pada subbab sebelumnya, kamu telah mempelajari bagaimana cara menentukan penyelesaian suatu SPLDV dengan menggunakan tabel, namun cara seperti itu membutuhkan waktu yang cukup lama. Untuk itu, ada beberapa
metode yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian SPLDV.
Metode-metode tersebut adalah:

1. Metode Grafik
2. Metode Substitusi
3. Metode Eliminasi

Pelajarilah uraian mengenai metode-metode tersebut pada bagian berikut ini.

1. Metode Grafik

Grafik untuk persamaan linear dua variabel berbentuk garis lurus. Bagaimana dengan SPLDV? Ingat, SPLDV terdiri atas dua buah persamaan dua variabel, berarti SPLDV digambarkan berupa dua buah garis lurus. Penyelesaian dapat ditentukan dengan menentukan titik potong kedua garis lurus tersebut. Untuk lebih jelasnya, coba perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.6 dan Contoh Soal 4.7

Contoh Soal 4.6

Gunakan metode grafik, tentukanlah penyelesaian SPLDV berikut.

a. $x + y = 2$

b. $3x + y = 6$

Jawab:

Langkah pertama, menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y pada masing-masing persamaan linear dua variabel.

a. Persamaan $x + y = 2$

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.

$x + y = 2$

$x + 0 = 2$

$x = 2$

Diperoleh $x + y = 2$ dan $y = 0$, maka diperoleh titik potong dengan sumbu x dititik (2, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$.

$x + y = 2$

$0 + y = 2$

$y = 2$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = 2$, maka diperoleh titik potong dengan sumbu y (0, 2).

b. Persamaan $3x + y = 6$

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.

$3x + y = 6$

$3x + 0 = 6$

$3x = 6$

$x = 2$

Diperoleh $x = 2$ dan $y = 0$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu x dititik (2, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$.

$3x + y = 6$

$3 \cdot 0 + y = 6$

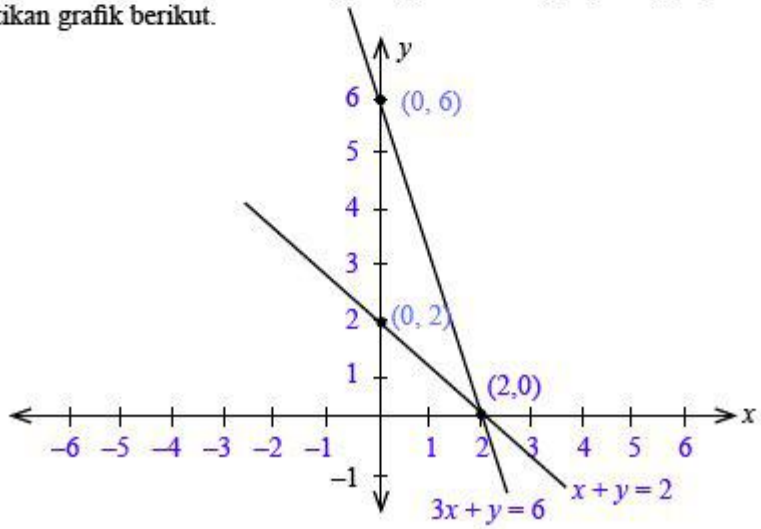
$y = 6$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = 6$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, 6).Langkah kedua, gambarkan ke dalam bidang koordinat Cartesius.

Persamaan $x + y = 2$ memiliki titik potong sumbu di (2, 0) dan (0, 2)

Persamaan $3x + y = 6$ memiliki titik potong sumbu di (2, 0) dan (0, 6)

Perhatikan grafik berikut.



Langkah ketiga, tentukan himpunan penyelesaian SPLDV berikut.

Perhatikan gambar tersebut, titik potong antara garis $x + y = 2$ dan $3x + y = 6$ adalah (2, 0) Jadi, Hp = {(2, 0)}

Contoh Soal 4.7

Gunakan metode grafik untuk mencari penyelesaian SPLDV berikut.

a. $x - y = 1$

b. $3x - y = 6$

Jawab:

Langkah pertama, menentukan titik potong terhadap sumbu x dan sumbu y

a. Persamaan $x - y = 1$.

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$

$x - y = 1$

$x - 0 = 1$

$x = 1$

Diperoleh $x = 1$ dan $y = 0$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu x: dititik (1, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$

$x - y = 1$

$0 - y = 1$

$y = -1$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = -1$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, –1)

b. Persamaan $3x - y = 6$.

Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$

$3x - y = 6$

$3x - 0 = 6$

$3x = 6$

$x = 1$

Diperoleh $x = 2$ dan $y = 0$, maka diperoleh titik potong dengan sumbu x dititik : (2, 0). Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$

$3x - y = 6$

$3 \cdot 0 - y = 6$

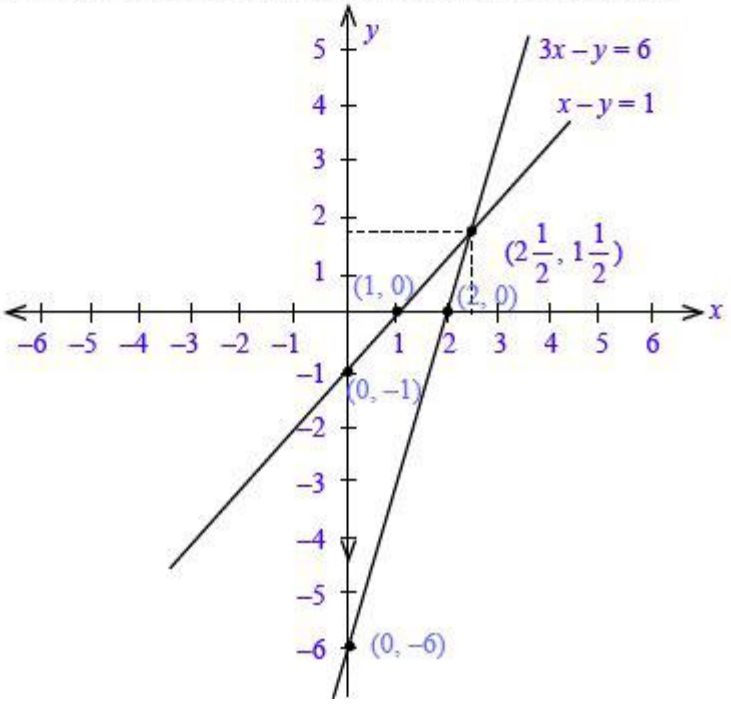
$0 - y = 6$

$y = -6$

Diperoleh $x = 0$ dan $y = -6$ maka diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, –6). Langkah kedua, gambarkan ke dalam bidang koordinat Cartesius.

a. Persamaan $x - y = 1$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing dititik (1, 0) dan (0, –1)

b. Persamaan $3x - y = 6$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing dititik (2, 0) dan (0, –6). Perhatikan grafik berikut.



Langkah ketiga, tentukan himpunan penyelesaian SPLDV tersebut.
Perhatikan gambar tersebut, titik potong antara garis $3x - y = 6$ dan $x - y = 1$ adalah $\left[2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right]$. Jadi, Hp = $\left\{\left[2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right]\right\}$

2. Metode Substitusi

Penyelesaian SPLDV menggunakan metode substitusi dilakukan dengan cara menyatakan salah satu variabel dalam bentuk variabel yang lain kemudian nilai variabel tersebut menggantikan variabel yang sama dalam persamaan yang lain. Adapun langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menentukan penyelesaian SPLDV dengan menggunakan metode substitusi dapat kamu pelajari dalam Contoh Soal 4.8 dan Contoh Soal 4.9

Contoh Soal 4.8

Gunakan metode substitusi, tentukan penyelesaian SPLDV berikut.
$3x + y = 7$
$x + 4y = 6$

Jawab:
Langkah pertama, tuliskan masing-masing persamaan dalam bentuk persamaan (1) dan (2).
$3x + y = 7$ ...(1)
$x + 4y = 6$ ...(2)
Langkah kedua, pilih salah satu persamaan, misalkan persamaan (1). Kemudian, nyatakan salah satu variabelnya dalam bentuk variabel lainnya.
$3x + y = 7$
$y = 7 - 3x$ ... (3)
Langkah ketiga, nilai variabel y pada persamaan (3) menggantikan variabel y pada persamaan (2).

$$\begin{aligned} x + 4y &= 6 \\ x + 4(7 - 3x) &= 6 \\ x + 28 - 12x &= 6 \\ x - 12x &= 6 - 28 \\ -11x &= -22 \\ x &= 2 \quad ...(4) \end{aligned}$$

Langkah keempat, nilai x pada persamaan (4) menggantikan variabel x pada salah satu persamaan awal, misalkan persamaan (1).

$$\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 3(2) + y &= 7 \\ 6 + y &= 7 \\ y &= 7 - 6 \\ y &= 1 \quad ...(5) \end{aligned}$$

Langkah kelima, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut.
Dari uraian diperoleh nilai $x = 2$ dan $y = 1$. Jadi, dapat dituliskan Hp = {(2, 1)}

Contoh Soal 4.9

Gunakan metode substitusi untuk menentukan penyelesaian SPLDV berikut.
$x + 5y = 13$
$2x - y = 4$

Jawab:
Langkah pertama, tuliskan masing-masing persamaan dalam bentuk persamaan (1) dan (2).
$x + 5y = 13$ ... (1)
$2x - y = 4$ ... (2)
Langkah kedua, pilih salah satu persamaan, misalkan persamaan (2). Kemudian, nyatakan salah satu variabelnya dalam bentuk variabel yang lain.
$x + 5y = 13$
$x = 13 - 5y$ ... (3)
Langkah ketiga, nilai variabel x pada persamaan (3) menggantikan variabel x pada persamaan (2).

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 2(13 - 5y) - y &= 4 \\ 26 - 10y - y &= 4 \\ -10 - y &= 4 - 26 \\ -11y &= -22 \\ y &= 2 \text{ ... (4)} \end{aligned}$$

Langkah keempat, nilai y pada persamaan (4) menggantikan variabel y pada salah satu persamaan awal, misalkan persamaan (2).
$2x - y = 4$
$2x - 2 = 4$
$2x = 4 + 2$
$2x = 6$
$x = 3$ ... (5)
Langkah kelima, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut.
Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai $x = 3$ dan $y = 2$. Jadi, diperoleh Hp = {(3, 2)}

3. Metode Eliminasi

Berbeda dengan metode substitusi yang mengganti variabel, metode eliminasi justru menghilangkan salah satu variabel untuk dapat menentukan nilai variabel yang lain. Dengan demikian, koefisien salah satu variabel yang akan dihilangkan haruslah sama atau dibuat sama. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan dan pelajari Contoh Soal 4.10 dan Contoh Soal 4.11

Contoh Soal 4.10

Gunakan metode eliminasi untuk menentukan penyelesaian SPLDV berikut.
$x + y = 7$
$2x + y = 9$

Jawab:
Langkah pertama, menghilangkan salah satu variabel dari SPLDV tersebut.
Misalkan, variabel y yang akan dihilangkan maka kedua persamaan harus dikurangkan.

$$\begin{array}{r} x+y=7 \\ 2x+y=2 \\ \hline -x=-1 \end{array} -$$

$$x=2$$

Diperoleh nilai x = 2.

Langkah kedua, menghilangkan variabel yang lain dari SPLDV tersebut, yaitu variabel x. Perhatikan koefisien x pada SPLDV tersebut tidak sama. Jadi, harus disamakan terlebih dahulu.

$$\begin{array}{l|l|l} x+y=7 & \times\ 2 & 2x+2y=14 \\ 2x+y=9 & \times\ 1 & 2x+y=9 \end{array}$$

Kemudian, kedua persamaan yang telah disetarakan dikurangkan.

$$\begin{array}{r} 2x+2y=14 \\ 2x+y=9 \\ \hline y=5 \end{array} -$$

Diperoleh nilai $y = 5$

Langkah ketiga, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut.

Diperoleh nilai $x = 2$ dan $y = 5$. Jadi, Hp = {(2, 5)}.

Contoh Soal 4.11

Gunakan metode eleminasi untuk menentukan penyelesaian SPLDV berikut.

$2x + 3y = 1$

$x - y = -2$

Jawab:

Langkah pertama, menghilangkan salah satu variabel dari SPLDV tersebut.

Misalkan, variabel x akan dihilangkan, namun, koefisien x harus disetarakan dulu.

$$\begin{array}{l|l|l} 2x+3y=1 & \times\ 1 & \rightarrow 2x+3y=1 \\ x-y=-2 & \times\ 2 & \rightarrow 2x-2y=-4 \end{array}$$

Setelah koefisien x setara, kemudian dikurangkan

$$\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ 2x-2y=4 \\ \hline 5y=5 \end{array} -$$

$$y=1$$

Langkah kedua, menghilangkan variabel yang lain dari SPLDV tersebut, yaitu variabel y. Namun, variabel y harus disetarakan terlebih dahulu.

$$\begin{array}{l|l|l} 2x+3y=1 & \times\ 1 & \rightarrow 2x+3y=1 \\ x-y=-2 & \times\ 3 & \rightarrow 3x-3y=-6 \end{array}$$

Setelah koefisien y setara, kemudian dijumlahkan.

$$\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ 3x-3y=-6 \\ \hline 5x=-5 \end{array} +$$

$$x=-1$$

Langkah ketiga, menentukan penyelesaian SPLDV tersebut. Diperoleh nilai $x = -1$ dan $y = 1$. Jadi, Hp = {(–1, 1)}.

C. Penerapan SPLDV

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali permasalahan-permasalahan yang dapat dipecahkan menggunakan SPLDV. Pada umumnya, permasalahan tersebut berkaitan dengan masalah aritmetika sosial. Misalnya, menentukan harga satuan barang, menentukan panjang atau lebar sebidang tanah, dan lain sebagainya. Agar kamu lebih memahami, perhatikan dan pelajari
contoh-contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.12

Harga 1 kg beras dan 4 kg minyak goreng Rp14.000,00. Sedangkan harga 2 kg beras dan 1 kg minyak goreng Rp10.500,00. Tentukan:

a. model matematika dari soal tersebut,
b. harga sebuah beras dan minyak goreng,
c. harga 2 kg beras dan 6 minyak goreng.

Jawab:

a. Misalkan: harga 1 kg beras = x
   harga 1 kg minyak goreng = y
   maka dapat dituliskan:
   $1x + 4y = 14.000$
   $2x + 1y = 10.500$
   Diperoleh model matematika:
   $x + 4y = 14.000$
   $2x + y = 10.500$
b. Untuk mencari harga satuan beras minyak goreng, tentukan penyelesaian SPLDV tersebut.
   Dengan menggunakan metode subtitusi, diperoleh:
   $x + 4y = 14.000$ … (1)
   $2x + y = 10.500$ … (2)
   - menentukan variabel x dari persamaan (1)
     $x + 4y = 14.000$
     $x = 14.000 - 4y$ … (3)

- Subtitusikan nilai x pada persamaan (3) ke persamaan (2).
  $2x + y = 10.500$
  $2\,(14.000 - 4y) + y = 10.500$
  $28.000 - 8y + y = 10.500$
  $-8y + y = 10.500 - 28.000$
  $-7y = -17.500$
  $y = 2.500 \ldots (4)$
- Subtitusikan nilai y pada persamaan (4) ke persamaan (2).
  $2x + y = 10.500$
  $2x + (2.500) = 10.500$
  $2x = 10.500 - 2.500$
  $2x = 8.000$
  $x = 4.000$
- menentukan nilai x dan y.
  Dari uraian tersebut diperoleh:
  x = harga 1 kg beras = Rp4.000,00
  y = harga 1 kg minyak goreng = Rp2.500,00

Contoh Soal 4.13

Umur Sani 7 tahun lebih tua dari umur Ari. Sedangkan jumlah umur mereka adalah 43 tahun. Tentukanlah:

a. model matematika dari soal tersebut,
b. umur masing-masing.

Jawab:

a. Misalkan: umur Sani = x tahun
   umur Ari = y tahun
   maka dapat dituliskan:
   $x = 7 + y$
   $x - y = 7$
   $x + y = 43$
   Diperoleh model matematika:
   $x - y = 7$
   $x + y = 43$
b. Untuk menghitung umur masing-masing, tentukan SPLDV tersebut.
   Dengan menggunakan metode eleminasi, diperoleh:
   - menghitung variabel x

     $x - y = 7$
     $x + y = 43$ (-)
     $-2y = -36$
     $y = 18$

   - menghilangkan variabel y

     $x - y = 7$
     $x + y = 43$ (+)
     $2x = 50$
     $x = 25$

   - menentukan nilai x dan y
     Dari uraian tersebut, diperoleh: x = umur Sani = 25 tahun
     y = umur Ari = 18 tahun

Contoh Soal 4.14

Harga sebuah buku tulis dan sebuah buku gambar Rp8.000,00. Sedangkan harga dua buku tulis dan sebuah buku gambar Rp11.000,00. Tentukanlah:

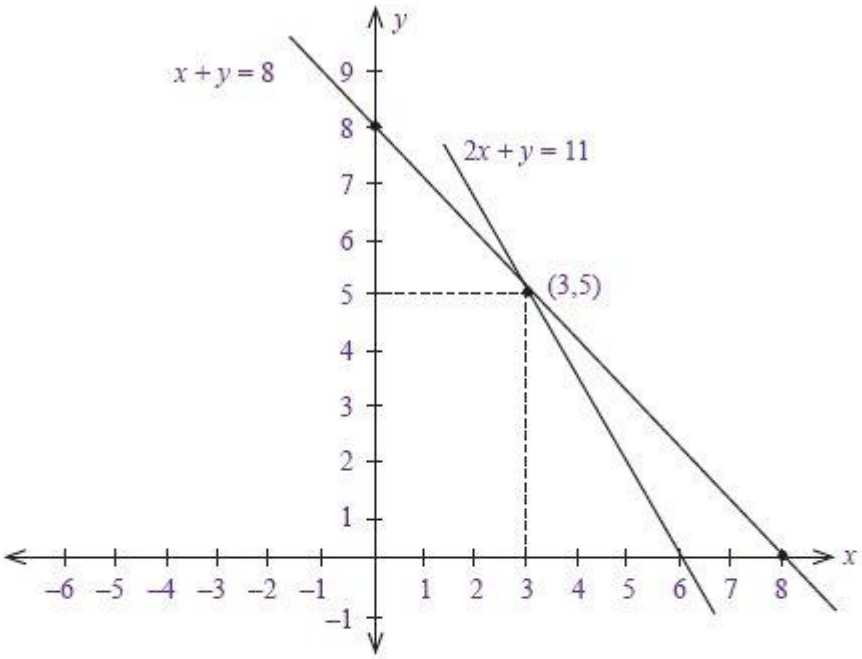
a. model matematika dari soal tersebut,
b. harga satuan dari buku tulis dan buku gambar,
c. harga dari 5 buku tulis dan 4 buku gambar.

Jawab:

a. Misalkan: harga buku tulis = x
harga buku gambar = y
Dapat dituliskan:
$x + y = 8.000$
$2x + y = 11.000$
Diperoleh model matematika:
$x + y = 8.000$
$2x + y = 11.000$

b. Untuk menentukan harga satuan, tentukan penyelesaian dari SPLDV tersebut. Misalkan, dengan menggunakan metode grafik diperoleh:

- Ubah SPLDV dalam suatu bentuk sederhana $\left.\begin{matrix} x+y=8 \\ 2x+y=11 \end{matrix}\right\}$ dalam ribuan rupiah.
- menentukan titik potong dengan sumbu x dan sumbu y untuk masing-masing persamaan.
  $x + y = 8$
  Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.
  $x + y = 8$
  $x + (0) = 8$
  $x = 8$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu x di titik (8, 0).
  Titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$
  $x + y = 8$
  $0 + y = 8$
  $y = 8$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu y di titik (0, 8).
  $2x + y = 11$
  Titik potong dengan sumbu x, berarti $y = 0$.
  $2x + y = 11$
  $2x + 0 = 11$
  $2x = 11$
  $x = 5{,}5$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu x di titik (5, 5, 0).
  titik potong dengan sumbu y, berarti $x = 0$.
  $2x + y = 11$
  $2 \cdot 0 + y = 11$
  $0 + y = 11$
  $y = 11$
  Diperoleh titik potong dengan sumbu y dititik (0, 11)
- Gambarlah dalam bidang koordinat Cartesius
  Persamaan $x + y = 8$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing di titik (8, 0) dan (0, 8). Persamaan $2x + y = 11$ memiliki titik potong dengan sumbu x dan y masing-masing di titik (5,5, 0) dan (0, 11).



- Menentukan penyelesaian SPLDV.
  Dari gambar terlihat bahwa titik potong kedua garis tersebut adalah (3, 5).
  Ini menunjukkan bahwa nilai x (dalam ribuan rupiah) adalah 3, sedangkan nilai y (dalam ribuan rupiah) adalah 5.
  Jadi, harga satuan buku tulis adalah Rp5.000,00 dan harga sebuah buku gambar adalah Rp5.000,00.

c. Harga dari 5 buku tulis dan 4 buku gambar adalah:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 5 \cdot 3.000 + 4 \cdot 5.000 \\ &= 15.000 + 20.000 \\ &= 35.000 \end{aligned}$$

Jadi, harga dari 5 buku tulis dan 4 buku gambar adalah Rp35.000,00