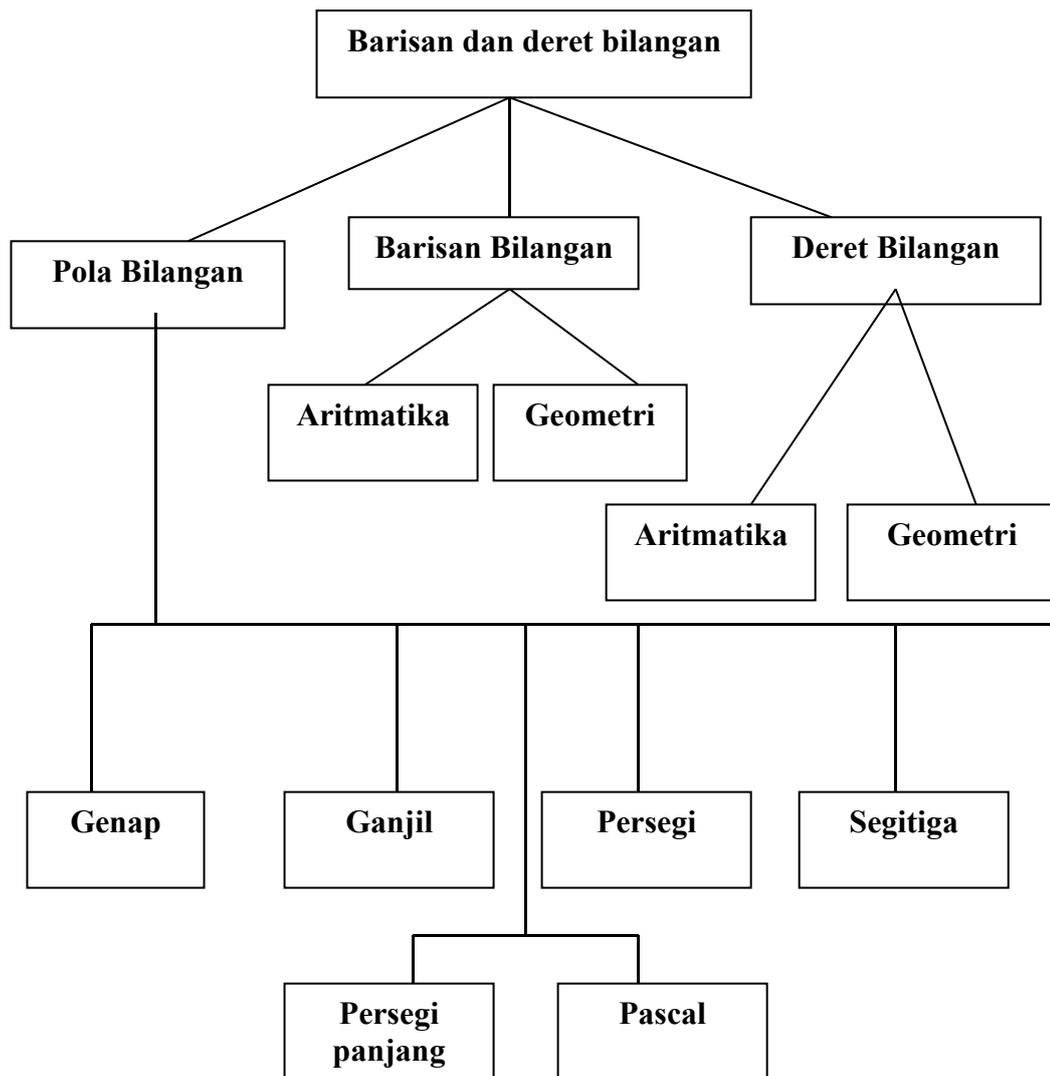


Materi Barisan dan Deret Bilangan

Kursiguru.com



A. Jenis Dan Bentuk Pola Bilangan

1. Pola Bilangan Ganjil

Diskusi 1 (berpikir kritis):

Apa yang akan kamu pelajari?

- Pola bilangan ganjil dan genap
- Pola bilangan persegi, segitiga, dan persegi panjang

Kata kunci

- Bentuk pola

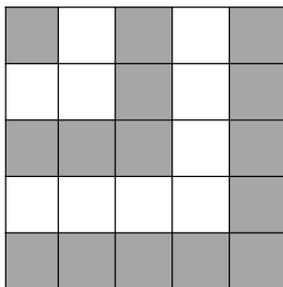


Gambar 1.1

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini!

- Apakah gambar diatas membentuk suatu pola?
- Nyatakanlah dengan suatu bilangan yang ditunjukkan dengan banyaknya titik, pola bilangan apakah yang kamu dapatkan? Jelaskan!
- Dapatkah kamu membuat pola bilangan yang lain?

Diskusi 2(berpikir kritis)



Pada gambar 1.2 disamping, apakah antara persegi yang berwarna dengan persegi yang tidak berwarna membentuk pola bilangan ganjil? Jelaskan!

Selanjutnya kita bandingkan jumlah bilangan- bilangan ganjil terhadap luas persegi. Perhatikanlah!

$$1 = 1 \times 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \times 3 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \times 5 = 5^2$$

Dari hasil diatas, bagaimanakah hubungan antara hasil penjumlahan bilangan- bilangan ganjil yang terurut dengan luas persegi panjang.

Dapatkah kita simpulkan bahwa jumlah dari n bilangan ganjil yang pertama adalah n^2 .

Contoh 1:

Tentukanlah jumlah dari 8 bilangan ganjil yang pertama!

Penyelesaian:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 \text{ atau } n^2 = 8^2 = 64$$

2. Pola bilangan genap

Pola bilangan genap yang kita pelajari adalah yang semestinya pada himpunan bilangan asli.

Diskusi 3 (berpikir kritis)

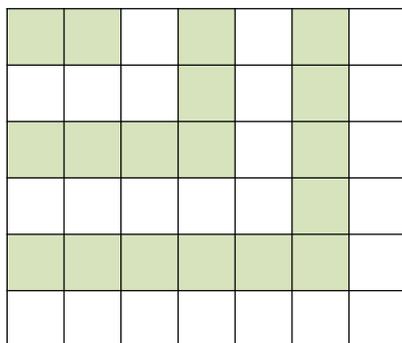


Gambar 1.3

Jawablah pertanyaan- pertanyaan di bawah ini.

- Apakah gambar diatas membentuk suatu pola?
- nyatakanlah dengan suatu pola bilangan apakah yang kamu dapatkan? Jelaskan!
- Dapatkah kamu membuat pola bilangan genap yang lain?

Diskusi 4 (berpikir kritis)



Gambar 1.4

Menurut gambar diatas, apakah antara persegi yang berwarna dengan persegi yang tidak berwarna membentuk pola bilangan genap? Jelaskan!

Selanjutnya kita bandingkan jumlah bilangan- bilangan yang genap itu terhadap luas persegi panjang. Perhatikanlah pola penjumlahan berikut!

$$2 = 2$$

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 4 + 6 = 12$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$$

Dari hasil diatas, bagaimanakah hubungan antar hasil penjumlahan bilangan- bilangan genap yang terurut dengan luas persegi panjang?

Dapat kita simpulkan bahwa jumlah dari n bilangan genap yang pertama adalah $n(n + 1)$

Contoh 2:

Tentukan jumlah dari 7 bilangan genap yang pertama!

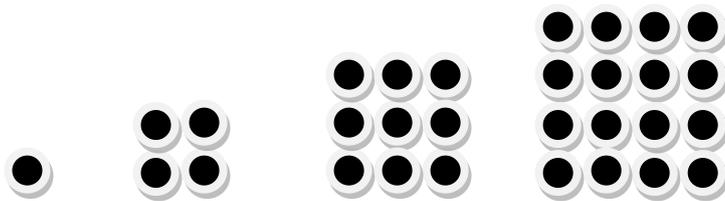
Penyelesaian:

Tujuh bilangan genap yang pertama adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14

Jumlah 7 bilangan genap yang pertama adalah $= n (n + 1) = 7 (7 + 1) = 56$

3. Pola bilangan persegi

Bilangan persegi adalah bilangan yang memiliki pola seperti persegi.



Gambar 1.5

Pada pola gambar diatas,tuliskan jumlah noktah dari masing- masing pola. Coba kamu gambarkan pola bilangan apakah yang ditunjukkan noktah pola ke-6?

Karena bilangan- bilangan 1, 4, 9, 16 berhubungan dengan persegi, maka bilangan itu dinamakan pola **bilangan persegi**.

Pola bilangan ke- n dari bilangan persegi adalah n^2

Contoh 3

Hitunglah jumlah titik pola ke-10 dari bilangan persegi.

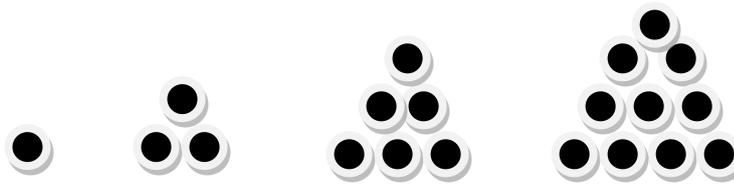
Penyelesaian:

Banyak titik pola ke-10 dari bilangan persegi adalah $n^2 = 10^2 = 100$

4. pola bilangan segitiga

Dalam sebuah akrobat para pemainnya mendominasi keahliannya yaitu pemain atas berdiri pada pundak pemain dibawahnya, sehingga yang paling tinggi hanya satu orang. Jika diperhatikan, berbentuk apakah susunan pemain akrobat itu? Bila banyaknya orang pada tingkat ke-2 dan ke-3? Pola bilangan segitiga diambil dari salah satu barisan bilangan pada segitiga pascal.

Bila kita gambar menggunakan noktah-noktah, akan memiliki pola seperti pada gambar 1.6 dibawah ini.



Gambar 1.6

Tuliskan banyaknya noktah-noktah pada pola diatas. Berapakah banyaknya noktah pada pola ke-6, ke-7, ke-8, dan seterusnya.

Pola barisan diatas 1, 3, 6, 10,.... karena bentuknya seperti segitiga, maka pola bilangan itu disebut **pola bilangan segitiga**.

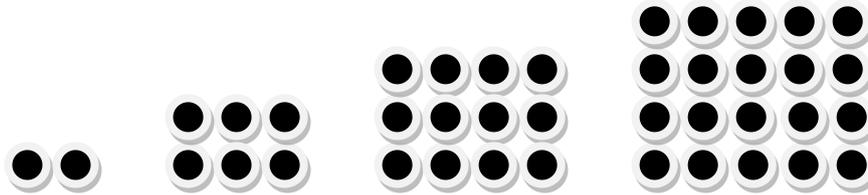
5. pola bilangan persegi panjang

Bilangan persegi panjang adalah bilangan yang polanya seperti persegi panjang.

Diskusi 5 (berpikir kritis) :

Pada setiap perpindahan sekolah, setiap anak dimintai foto untuk dipajang pada sebuah bingkai yang berbentuk persegi. Setiap satu tahun sekali ada pergantian foto disusun membentuk suatu pola bilangan. Jumlah foto pada bingkai pertama ada 2, bingkai kedua 6, bingkai ketiga ada 20, dan seterusnya. Jadi, jumlah foto yang dipasang pada bingkai persegi akan membentuk pola bilangan persegi.

Perhatikan **gambar 1.7**



Tentukanlah banyaknya noktah-noktah pada masing-masing pola diatas.berapakah banyaknya noktah pada pola ke 6? Pola bilangan diatas adalah 2, 6, 9, 20,...karena bentuknya seperti persegi panjang, maka pola bilangan itu dinamakan **pola bilangan persegi panjang**.

6. Pola bilangan segitiga pascal

Blaise Pascal (1632-1662) adalah Matematikawan dari Prancis. Ia menyusun pola bilangan yang sangat unik, yaitu segitiga pascal. Untuk lebih memahami pola bilangan segitiga pascal, perhatikanlah **gambar 1.8** berikut:

			1								
			1		1						
		1		2		1					
		1		3		3		1			
		1		4		6		4		1	
	1		5		10		10		5		1

Bilangan pada diagonal-diagonal segitiga pascal dapat dilihat pada pascal, yaitu:

- Diagonal ke-1: 1, 1, 1, 1,.....
- Diagonal ke-2: 1, 2, 3, 4, 5,.....
- Diagonal ke-3: 1, 3, 6, 10,...
- Diagonal ke-4: 1, 4, 10,...dan seterusnya

Dapatkan kamu melanjutkan sampai pola diagonal ke-9? Bagaimana kamu mendapatkannya?

Pola jumlah baris ke- n pada segitiga pascal adalah 2^{n-1}

B. Barisan Bilangan

Apa yang akan kamu pelajari?

- Pengertian barisan bilangan
- Mengenal unsur-unsur barisan, suku, dan beda.
- Menentukan suku ke- n dari suatu barisan

1. Pengertian Barisan

Setiap senin di sekolahmu selalu diadakan upacara bendera. tentunya siswa – siswi akan membentuk suatu barisan yang rapi.

- Bagaimanakah cara mengatur barisan itu supaya rapi?
- Bagaimanakah cara mengurutkan barisan?
- Apakah ada aturan untuk mengurutkannya?

Pada suatu barisan, tinggi 6 siswa masing- masing adalah 135 cm, 140 cm, 150 cm, 155 cm, 160 cm, dan 170 cm. Apakah barisan diatas membentuk suatu pola?

Barisan bilangan adalah urutan bilangan – bilangan dengan aturan atau pola tertentu. Setiap bilangan pada barisan bilangan disebut suku.

Perhatikanlah setiap barisan dibawah ini!

- 1, 3, 5, 7, 9, 11, seterusnya yang selalu bilangan ganjil
- 20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, dan seterusnya yang selalu berselisih 5

Barisan bilangan pada **a** sering kita jumpai dalam kehidupan sehari – hari. misalnya, ketika mencari nomor rumah 5, kamu tentu akan mencari pada sisi yang lain yaitu deretan rumah bernomor ganjil.

Coba perhatikan barisan bilangan 1, 3, 5, 7, 9, 11, dan seterusnya.

- Suku ke-1 adalah 1, biasanya ditulis dengan lambang $U_1 = 1$
- Suku ke-2 adalah 3, biasanya ditulis dengan lambang $U_2 = 3$
- Suku ke-3 adalah 5, biasanya ditulis dengan lambang $U_3 = 5$
- Dan seterusnya.

Berapakah suku ke-4?

Dalam menentukan suku ke-4 dari barisan harus diketahui tata urutan suku barisan itu. Dalam hal ini, suatu bilangan yang tetap ditambahkan agar didapat bilangan di depannya. Bilangan tetap itu disebut **selisih** atau **beda**.

Beda itu boleh positif atau negatif. Jika beda itu positif, maka barisan itu menjadi bertambah nilainya. Jika beda itu negatif, maka barisan itu menjadi berkurang nilainya.

Contoh 4:

Suatu barisan bilangan diketahui 2, 5, 8, 11....dan seterusnya.tentukanlah

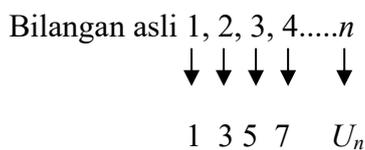
- a. Suku ke-1
- b. Suku ke-2
- c. Suku ke-3
- d. Suku ke-4
- e. Suku ke-5
- f. Beda
- g. Aturan tiap suku

Penyelesaian

- a. $U_1 = 2$
- b. $U_2 = 5$
- c. $U_3 = 8$
- d. $U_4 = 11$
- e. $U_5 = 14$
- f. Bedanya 3
- g. Aturan tiap suku diperoleh dengan cara menambahkan 3

2. Menentukan suku ke-n dari suatu barisan

Penulisan barisan bilangan dapat dinyatakan dalam rumus aljabar. Misalkan: barisan bilangan ganjil 1, 3, 5, 7,dan seterusnya.dapatkah kamu menyebutkan suku ke-100? untuk menjawab pertanyaan diatas, kamu tidak perlu menulis baris bilangan sampai suku ke-100. Akan tetapi, gunakanlah suku ke-n dari barisan bilangan. Barisan bilangan ganjil tadi dapat kita petakan dengan barisan bilangan asli.



Pada tiap suku mempunyai beda 2, maka rumus suku ke-n bilangan ditulis dengan $U_n = 2n - 1$ dengan n anggota bilangan asli. Untuk suku ke-100, suku ke-n tinggal diganti menjadi $U_{100} = 2 \times 100 - 1 = 199$. Jadi, suku ke-100 dari bilangan ganjil adalah 199

Contoh 5 :

Carilah suku ke- n dari suatu barisan 1, 4, 7, 10dan seterusnya. Tentukan suku ke 200 barisan berikut.

Penyelesaian:

Beda suku yang berurutan adalah suku- n adalah $U_n = 3n - 2$

$$U_{200} = 3 \times 200 - 2 = 598$$

Jadi, suku ke-200 adalah 598

C. Barisan dan Deret Aritmatika

1. Barisan Aritmatika

Barisan Aritmatika adalah suatu barisan bilangan yang suku selanjutnya diperoleh dengan menambah atau mengurangi dengan suatu bilangan yang tetap kepada suku sebelumnya. Bilangan yang tetap itu disebut selisih atau beda. Apabila bedanya positif, maka barisan itu naik. Apabila bedanya negatif, maka barisan itu turun. Perhatikan barisan – barisan berikut.

a. 100, 90, 80, 70,....

b. 6, 12, 18, 24,....

Barisan a dan b merupakan barisan aritmatika. Pada tiap barisan bilangan-bilangan diatas, beda dua suku yang berurutan selalu tetap (konstan).

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$, disebut barisan aritmatika jika untuk setiap nilai n berlaku.

$U_2 - U_1, U_3 - U_2 = \dots, U_n - U_{n-1} = b$, dengan b suatu tetapan yang tidak tergantung pada n

Apa yang akan kamu pelajari?

- Pengertian barisan dan deret aritmatika naik apa turun.
- Menentukan rumus suku ke- n dari barisan aritmatika dan jumlah n suku pertama deret aritmatika.
- Menghitung nilai suku ke – n dari barisan aritmatika dan jumlah n suku pertama deret aritmatika.

Kata kunci

- Beda
- Suku ke- n

Menentukan Rumus Suku Ke- n Basisan Aritmatika

Jika suku pertama U_1 kita misalkan a , beda kita misalkan b , dan suku ke- n kita misalkan U_n maka barisan aritmatika ditulis sebagai berikut

$$\begin{array}{cccccc}
 U_1 & U_2 & U_3 & U_4, \dots & U_n & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 a & a+b & a+2b & a+3b & a+(n-1)b &
 \end{array}$$

rumus suku ke- n suatu barisan aritmatika adalah

$$U = a + (n-1)b$$

Sifat-sifat suku ke- n

$$U_n = a + (n-1)b = a + bn - b = bn + (a - b)$$

Jadi suku ke- n suatu barisan aritmatika adalah fungsi linear dari n , dengan bilangan asli.

Contoh 6 :

suatu barisan aritmatika 2, 5, 8, 11. . . dan seterusnya.

Tentukanlah :

- a. suku pertama
- b. beda
- c. suku ke-15
- d. rumus suku ke- n

penyelesaian :

Barisan 2, 5, 8, 11. . . dan seterusnya.

a. suku pertama $U_1 = a = 2$

b. Beda $b = 3$

c. Suku ke-15

$$\begin{aligned}
 U_{15} &= a + (n-1)b \\
 &= 2 + (n-1)b \\
 &= 2 + (14)3
 \end{aligned}$$

$$= 2 + 42$$

$$= 43$$

d. Rumus suku ke- n

$$\begin{aligned}
 U_n &= a + (n-1)b \\
 &= 2 + (n-1)3 \\
 &= 2 + 3n-3 \\
 U_n &= 3n-1
 \end{aligned}$$

Contoh 7 :

Suku pertama sebuah barisan aritmatika sama dengan 2, sedangkan bedanya sama dengan 5.

- a. Carilah suku yang ke-15
- b. Suku berapakah yang nilainya sama dengan 97

Penyelesaian:

a. $U_1 = a = 2$

$$b = 5$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$= 2 + (n - 1)5$$

$$= 2 + 5n - 5$$

$$= 5n - 3$$

$$U_{15} = 5 \times 15 - 3$$

$$= 75 - 3$$

$$= 72$$

jadi suku ke-15 adalah 72

b. $U_n = 97$

$$U_n = 5n - 3$$

$$5n = U_n + 3$$

$$5n = 97 + 3$$

$$5n = 100$$

$$n = 20$$

Jadi suku yang nilai 97 adalah suku yang ke-20

2. Deret Aritmatika

Pada bahasan sebelumnya kamu sudah mempelajari barisan aritmatika. Jika suku-suku barisan aritmatika kita jumlahkan, maka deret tersebut disebut **deret aritmatika**.

Jika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ adalah suku-suku barisan aritmatika, maka $U_1 + U_2 + U_3, \dots, + U_n$ disebut **deret aritmatika**.

Jika jumlah n suku pertama deret aritmatika itu kita lambangkan dengan S_n maka

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3, \dots, + U_n$$

Seorang matematikawan Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) ketika di sekolah dasar, gurunya meminta dia untuk menjumlahkan seratus bilangan asli yang pertama. Gauss memberikan jawaban dalam beberapa detik, dia menjawab sebagai berikut:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

$$S_{100} = 100 + 99 + \dots + 2 + 1$$

$$+$$

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101$$

$$2S_{100} = 100 \times 101$$

$$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Jadi, jumlah seratus bilangan asli yang pertama adalah 5050.

Kita dapat mencari rumus untuk jumlah n buah suku pertama (S_n), dari aritmatika, yaitu

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$\text{Atau } S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$$

Kemudian, urutan suku-suku dijumlahkan dan dibalik sehingga

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$$

$$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a$$

$$+$$

$$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n)$$

Penjumlahan n suku, tiap sukunya $(a + U_n)$

$$2S_n = n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]$$

$$U_n = a + (n-1)b$$

Jadi, S_n merupakan fungsi kuadrat dari n dengan n bilangan asli.

Contoh 8

Ditentukan deret aritmatika $1 + 4 + 7 + 10 + \dots$

Carilah:

- Rumus suku ke- n
- Rumus jumlah n suku pertama Jumlah 20 suku pertama

Penyelesaian:

- Diketahui: $a = 1$, dan $b = 3$

$$\begin{aligned}U_n &= a + (n - 1)b \\ &= 1 + (n - 1)3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

- Jumlah n suku pertama

$$S_n = \frac{n(1 + 3n - 2)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

- Jumlah 20 suku pertama

$$S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

$$S_n = \frac{3(20)^2 - 20}{2}$$

$$= 600 - 10$$

$$= 590$$

Jadi, 20 jumlah suku pertama adalah 590.

D. Barisan Dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang tiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan atau membagi dengan suatu bilangan tetap. Bilangan tetap itu yang disebut pembanding atau rasio yang dilambangkan dengan huruf r .

Perhatikan contoh barisan geometri berikut

1, 2, 4, 8, 16.... rasionya $r = 2$

2, -6, 18, -54....rasionya $r = -3$

Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ disebut barisan geometri, jika untuk tiap nilai n bilangan asli berlaku $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r$

Jika $|r| > 1$, artinya $r < -1$ atau $r > 1$ maka barisan suku-suku geometri itu semakin besar. Barisan tersebut dinamakan barisan geometri naik. Jika $|r| < 1$ artinya $-1 < r < 1$, maka dinamakan barisan geometri turun.

Menentukan Rumus Suku Ke- n Barisan Geometri

Jika suku pertama U_1 , dinyatakan dengan a dan perbandingan dua suku berurutan adalah rasio r dan suku ke- n dinyatakan dengan U_n , maka kita dapat

$$\frac{U_2}{U_1} = r \implies U_2 = ar$$

$$\frac{U_3}{U_2} = r \implies U_3 = ar^2$$

Dari bentuk diatas, kita peroleh suatu barisan geometri, pada umumnya sebagai berikut

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r \implies U_n = ar^{n-1}$$

Contoh 9 :

suku pertama suatu barisan geometri sama dengan 16, sedangkan suku ke empat sama dengan 1024.

Ditanya:

- Rasio?
- Rumus suku ke- n ?

Penyelesaian :

a. $a = 16$ dan $U_4 = 128$

$$ar^{n-1} = ar^{n-1}$$

$$128 = 16 r^{4-1}$$

$$r^3 = 8 = 2$$

b. $U_n = ar^{n-1}$

$$= 16 (2)^{n-1}$$

$$= 16 \times 2^{n-1}$$

2. deret geometri

Deret geometri adalah penjumlahan suku-suku dari barisan geometri.

Jika $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$ adalah barisan geometri, maka $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$ disebut deret geometri.

Kalau jumlah n suku deret geometri kita lambangkan dengan S_n , maka dapat ditulis

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

Kita kalikan persamaan diatas dengan r , diperoleh

$$r S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - r S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Dengan demikian, jumlah suku n suku pertama deret geometri dapat ditentukan dengan rumus:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \quad \text{rumus untuk barisan turun atau Jika } |r| < 1$$

$$\text{Dan } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \quad \text{rumus untuk barisan naik atau } |r| > 1$$