



KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020



Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS
XI



TURUNAN FUNGSI ALJABAR

MATEMATIKA UMUM

KELAS XI

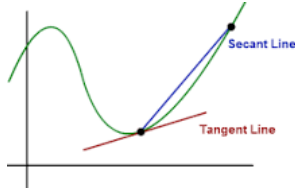
PENYUSUN
YUYUN SRI YUNIARTI
SMA NEGERI 1 PEDES

DAFTAR ISI

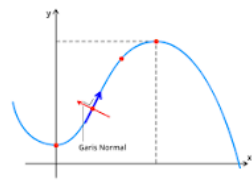
PENYUSUN	2
DAFTAR ISI	3
GLOSARIUM	4
PETA KONSEP	5
PENDAHULUAN	6
A. Identitas Modul	6
B. Kompetensi Dasar	6
C. Deskripsi Singkat Materi	6
D. Petunjuk Penggunaan Modul	7
E. Materi Pembelajaran	8
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1	9
Menemukan Konsep Turunan	9
A. Tujuan Pembelajaran	9
B. Uraian Materi	9
C. Rangkuman	13
D. Latihan Soal	14
E. Penilaian Diri	19
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2	20
SIFAT-SIFAT TURUNAN	20
A. Tujuan Pembelajaran	20
B. Uraian Materi	20
C. Rangkuman	26
D. Latihan Soal	27
E. Penilaian Diri	30
EVALUASI	31
DAFTAR PUSTAKA	36

GLOSARIUM

Garis Sekan (Secant Line) adalah **garis** lurus yang ditarik dari dua titik pada suatu kurva.



Garis normal merupakan **garis** yang melalui titik singgung dan tegak lurus dengan **garis** singgung.



garis singgung (disebut juga **garis tangen**) **kurva** bidang pada **titik** yang diketahui adalah **garis lurus** yang "hanya menyentuh" kurva pada titik tersebut.



Turunan :Pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai input, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya.

$f'(x)$:Turunan pertama dari fungsi $f(x)$

Gradien : (**bahasa Inggris**: *gradient*) adalah salah satu operator dalam **kalkulus vektor** yang berguna untuk mencari perubahan arah dan kecepatan dalam bidang skalar, atau biasa disebut dengan kemiringan.

$u(x)$:Fungsi u

$v(x)$:Fungsi v

Titik Singgung : Titik persinggungan antara dua kurva

PETA KONSEP



PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran	: Matematika Umum
Kelas	: XI
Alokasi Waktu	: 10 JP
Judul Modul	: Differensial

B. Kompetensi Dasar

- 3.1 Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat-sifat turunan fungsi
- 4.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar

C. Deskripsi Singkat Materi

Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai yang dimasukan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Terdapat berbagai pemanfaatan turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.

- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan,terdapat juga pada quick count. Dalam perhitungan tersebut,terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.

Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Sebelum Ananda membaca isi modul, terlebih dahulu membaca petunjuk khusus dalam penggunaan modul agar memperoleh hasil yang optimal.

1. Sebelum memulai menggunakan modul, mari berdoa kepada Tuhan yang Maha Esa agar diberikan kemudahan dalam memahami materi ini dan dapat mengamalkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Sebaiknya Ananda mulai membaca dari pendahuluan, kegiatan pembelajaran, rangkuman, hingga daftar pustaka secara berurutan.
3. Setiap akhir kegiatan pembelajaran, Ananda mengerjakan latihan soal dengan jujur tanpa melihat uraian materi.

4. Ananda dikatakan tuntas apabila dalam mengerjakan latihan soal memperoleh nilai ≥ 75 sehingga dapat melanjutkan ke materi selanjutnya.
5. Jika Ananda memperoleh nilai < 75 maka Ananda harus mengulangi materi pada modul ini dan mengerjakan kembali latihan soal yang ada.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

- Pertama : Menemukan Konsep Turunan Sebagai Limit Fungsi
Kedua : Turunan Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

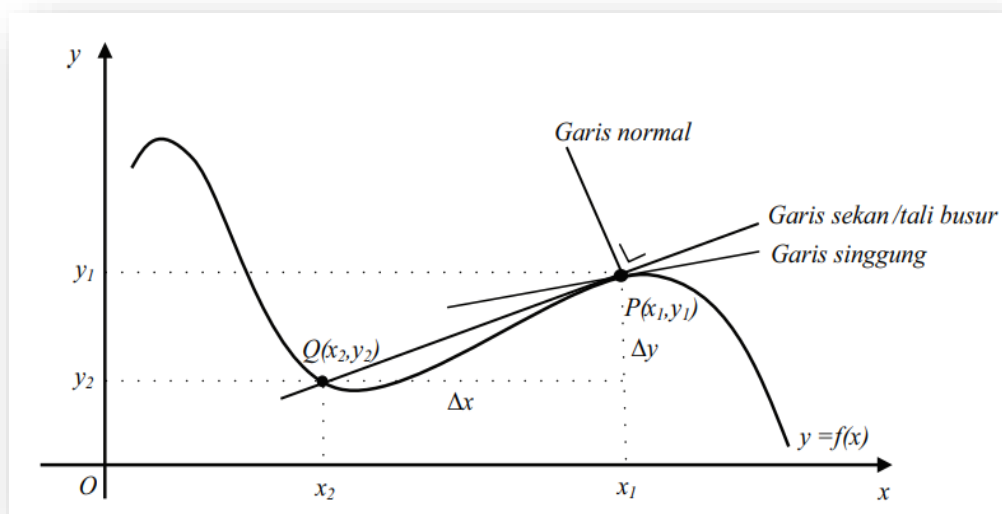
Menemukan Konsep Turunan

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan digiring untuk dapat menemukan konsep turunan secara mandiri. Selain itu juga Ananda akan diajak untuk dapat menentukan turunan fungsi aljabar mulai dari yang paling sederhana sampai ke yang kompleks. Namun tidak usah khawatir, dalam modul ini Ananda akan mempelajarinya secara bertahap untuk memungkinkan Ananda dapat mempelajarinya secara mandiri.

B. Uraian Materi

Untuk menemukan konsep turunan, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contohnya. Kita akan memulainya dengan menemukan konsep garis tangen atau garis singgung. Sebagai ilustrasi perhatikan berikut:



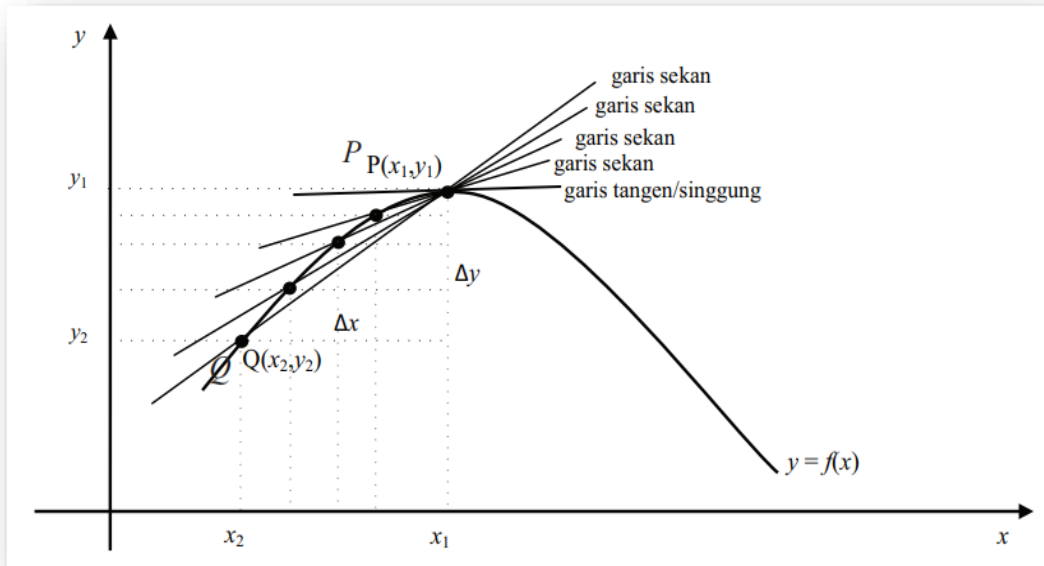
Gambar 1

Misalkan seseorang yang sedang bermain papan seluncur bergerak dari titik $Q(x_2, y_2)$ dan melayang ke udara pada titik $P(x_1, y_1)$ sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P . Garis yang menghubungkan titik $Q(x_2, y_2)$ dan titik $P(x_1, y_1)$ disebut tali busur atau garis sekan dengan kemiringan atau gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Ingat konsep garis lurus).

Jika $\Delta x = x_2 - x_1$ maka $x_2 = \Delta x + x_1$ (Δx merupakan selisih dari x) dan Jika $\Delta y = y_2 - y_1$ maka $y_2 = \Delta y + y_1$

Jika Δx semakin kecil maka Q akan bergerak mendekati P (Jika $\Delta x \rightarrow 0$ maka $Q \rightarrow P$).

Sehingga gambar grafiknya dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2

Jika $y = f(x)$ maka gradien garis sekan PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat menarik definisi:

Misalkan $f : R \rightarrow R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f . Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Kita kembali ke gambar kedua yuk, Ananda amati kembali bahwa jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \rightarrow 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien :

$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ jika limitnya ada, nahhhh ini yang harus Ananda pahami tentang teori limit. Dari perhitungan matematis ini kita dapatkan definisi kedua mengenai gradien garis singgung yaitu sebagai berikut:

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f . Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{\text{sec}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

Contoh soal 1:

Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik $(2, 6)$

Jawab :

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

$$f(2) = 2^2 + 3(2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6$$

$$\begin{aligned} f(2 + \Delta x) &= (2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) - 4 \\ &= 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 4 = \Delta x^2 + 7\Delta x + 6 \end{aligned}$$

$$\text{Menurut rumus : } m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x + 6 - 6}{\Delta x}$$

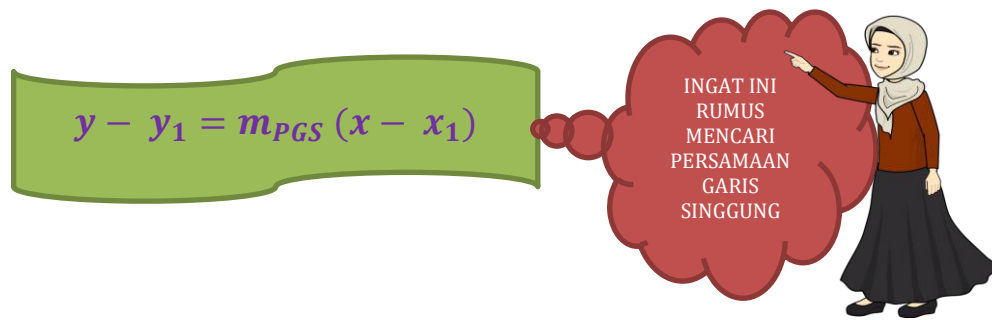
$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = 0 + 7 = 7$$

Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik $(2, 6)$ sama dengan 7.

Bagaimana Ananda? Bisakah Ananda memahami bagaimana mencari gradien atau kemiringan suatu kurva dengan menggunakan konsep sekan? Nahhh lanjut ke pelajaran berikutnya yaitu kita akan mengulas kembali persamaan garis singgung yang pernah Ananda pelajari waktu SMP. Ingat kembali bahwa rumus mencari persamaan garis kurva $y = f(x)$ di titik (x_1, y_1) yaitu :

**Contoh soal 2:**

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x$ di titik $(-1, -3)$.

Jawab:

$$f(x) = x^2 + 4x$$

Langkah pertama kita cari dulu $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3$

Kemudian cari $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 + 4(-1 + \Delta x)$

$$= (-1)^2 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = \Delta x^2 + 2\Delta x - 3$$

Maka di dapat :

$$\begin{aligned} m_{PGS} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 - (-3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 + 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Didapat gradien kurva tersebut = 2

Maka Persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x$ di titik $(-1, -3)$. Adalah

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m_{PGS} (x - x_1) \\ y - (-3) &= 2 (x - (-1)) \\ y + 3 &= 2 (x + 1) \\ y + 3 &= 2x + 2 \\ y &= 2x + 2 - 3 \\ y &= 2x - 1 \\ \text{Atau bentuk lainnya} \\ y - 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

C. Rangkuman

- a. Definisi untuk mencari gradien atau kemiringan garis singgung adalah

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f . Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{\text{sec}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.
(Jika limitnya ada)

- b. Rumus untuk mencari persamaan garis singgung kurva

$$y - y_1 = m_{PGS} (x - x_1)$$

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokkan dengan kunci jawabannya.

- 1) Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ di titik $(2, 9)$

Jawab: $m = 11$

- 2) Gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik $(1, -1)$

Jawab : $m = 1$

- 3) Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 5$ di titik $(-1, 8)$ adalah

...

Jawab : $y + 4x - 4 = 0$

- 4) Persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik $(-2, 7)$ adalah ...

Jawab : $y + 12x + 17 = 0$

- 5) Diketahui garis $x + y = a$ menyinggung parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah

Jawab: $a = 5$

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skoring
1	Penyelesaian Diketahui kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ $f(2) = 2(2)^2 + 3(2) - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$ $f(2 + \Delta x) = 2(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) - 5$ $= 2(4 + 4\Delta x + \Delta x^2) + 6 + 3\Delta x - 5$ $= 8 + 8\Delta x + 2\Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 5$ $= 2\Delta x^2 + 11\Delta x + 9$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x^2 + 11\Delta x + 9 - 9}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x^2 + 11\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{11\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 + 11 = 11$ Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 5$ di titik (2, 9) sama dengan 11.	20
2	Penyelesaian Diketahui kurva $y = x^3 - 2x$ dan titik (1, - 1) $f(x) = x^3 - 2x$ $f(1) = 1^3 - 2(1) = -1$ $f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^3 - 2(\Delta x)$ $= 1 + 3\Delta x + 3\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2\Delta x$ $= \Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x - 1$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$	20

	$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x - 1 - (-1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3 + 3\Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 + 0 + 1 = 1$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik $(1, -1)$ sama dengan 1	
3	Penyelesaian Diketahui kurva $y = x^2 - 2x + 5$ dan titik $(-1, 8)$ $f(x) = x^2 - 2x + 5$ $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 5 = 1 + 2 + 5 = 8$ $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 5$ $= (1 - 2\Delta x + \Delta x^2) + 2 - 2\Delta x + 5$ $= 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 + 2 - 2\Delta x + 5$ $= \Delta x^2 - 4\Delta x + 8$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x + 8 - 8}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 - 4 = -4$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 5$ dan titik $(-1, 8)$ sama dengan -4. Persamaan garis singgungnya : $y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)$ $y - 8 = -4(x - (-1))$ $y - 8 = -4x - 4$ Atau $y = -4x - 4 + 8$ $y = -4x + 4$	20
	Penyelesaian Diketahui kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik $(-2, 7)$	

4	$f(x) = 3x^2 - 5$ $f(-2) = 3(-2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$ $f(-2 + \Delta x) = 3(-2 + \Delta x)^2 - 5$ $= 3(4 - 4\Delta x + \Delta x^2) - 5$ $= 3\Delta x^2 - 12\Delta x + 7$ Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2 - 12\Delta x + 7 - 7}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2 - 12\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12\Delta x}{\Delta x}$ $m_{PGS} = 0 - 12 = -12$ Jadi gradien garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik $(-2, 7)$ sama dengan -12. Persamaan garis singgungnya : $y - y_1 = m_{PGS}(x - x_1)$ $y - 7 = -12(x - (-2))$ $y - 7 = -12x - 24$ Atau $y = -12x - 24 + 7$ $y = -12x - 17$	20
5	Penyelesaian Diketahui garis $x + y = a$ menyinggung parabola $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah $x + y = a$ $y = a - x$ menyinggung parabola maka $y_1 = y_2$ $a - x = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$ $-\frac{1}{3}x^2 + x + 2 + x - a = 0$ $-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 2 - a = 0$ $a = -\frac{1}{3}; b = 2; c = 2 - a$	20

	Karena menyinggung maka, $D = 0$ $D = b^2 - 4ac$ $D = (2)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right)(2 - a) = 0$ $4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $\frac{12}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $\frac{20}{3} - \frac{4}{3}a = 0$ $-\frac{4}{3}a = 0 - \frac{20}{3} = -\frac{20}{3}$ $a = -\frac{20}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 5$	
TOTAL SKOR		100

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi turunan ?		
2.	Apakah Ananda telah mampu memahami konsep gradien garis singgung?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan turunan?		

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

SIFAT-SIFAT TURUNAN

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kedua, Anda akan dibimbing untuk dapat menggunakan sifat-sifat turunan yang telah Anda peroleh pada kegiatan pembelajaran satu. Cara menentukan turunan pertama sebuah fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ Anda dapat menggunakan definisi turunan atau dapat juga menggunakan rumus umum turunan.

B. Uraian Materi

Konsep turunan merupakan salah satu dari bagian utama kalkulus. Konsep turunan ditemukan oleh **Sir Isaac Newton** (1642 – 1727) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716). Bahasa lain dari turunan adalah differensial yang merupakan tingkat perubahan dari suatu fungsi. Turunan dari fungsi $y = f(x)$ dituliskan dengan $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$ (dibaca y aksen sama dengan f aksen x sama dengan dy dx sama dengan $d f(x)$ dx , ini dapat diartikan turunan pertama fungsi f terhadap x , atau turunan pertama y . Jika fungsinya dalam a , $f(a)$ maka $f'(a)$ merupakan turunan pertama f terhadap a dan seterusnya.

Definisi Turunan

Misal $f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$, turunan pertama dari fungsi tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x dan ditulis sebagai:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Konsep ini merupakan dasar untuk menentukan turunan suatu fungsi. Atau definisi tersebut dapat dituliskan:

Definisi 1

Misalkan $f: S \rightarrow R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S .

Atau jika terdapat titik c anggota R

Definisi 2

Misalkan fungsi $f: S \rightarrow R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika ada $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Definisi 3

Misalkan fungsi $f: S \rightarrow R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut:

Sifat turunan fungsi

Misalkan fungsi $f: S \rightarrow R$, $S \subseteq R$ dengan $x \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis,

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L.$$

Keterangan:

1. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S .
2. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S .

Contoh Soal:

Dengan menggunakan konsep turunan, tentukan turunan pertama dari :

1. $f(x) = 10$

Jawab:

Karena $f(x) = 10$ merupakan fungsi konstan (tetap) maka $f(x + \Delta x) = 10$ (tetap)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10 - 10}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. $f(x) = 3x + 5$

Jawab:

$$f(x) = 3x + 5 \text{ maka } f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x) + 5 = 3x + 3\Delta x + 5$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x) + 5 - (3x + 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

3. $f(x) = 5x^2 + 3$

Jawab:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= 5(x + \Delta x)^2 + 3 = 5(x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2) + 3 \\ &= 5x^2 + 10x \cdot \Delta x + 5\Delta x^2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10x \cdot \Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - (5x^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - 5x^2 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10x \cdot \Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10x \cdot \Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 10x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5\Delta x = 10x + 0 = 10x \end{aligned}$$

Sekarang marilah kita perhatikan ketiga contoh tersebut lalu kita tarik kesimpulan. Untuk contoh pertama, fungsi yang diberikan adalah fungsi konstan, menghasilkan turunan pertama sama dengan nol. Contoh soal kedua adalah fungsi linear menghasilkan turunan pertama koefisiennya, dan contoh soal ketiga adalah fungsi kuadrat, nahh perhatikan bahwa koefisien dari x pangkat dua adalah 5 dan pangkat dari x adalah 2, kalikan 5 dengan 2 didapat $5(2) = 10$, hasil akhir berpangkat satu maka $2 - 1 = 1$. Dari sini kita tarik kesimpulan bahwa:

- Untuk fungsi konstan mempunyai bentuk umum $f(x) = c$, dengan c adalah konstanta bilangan Real.

$$\text{Jika } f(x) = c; \text{ maka } f'(x) = 0$$

- Untuk fungsi linear mempunyai bentuk umum $y = ax + b$, dengan a dan b anggota bilangan Real.

$$\text{Jika } f(x) = ax + b \text{ maka } f'(x) = a$$

- Untuk fungsi kuadrat mempunyai bentuk umum $y = ax^n$, dengan a anggota bilangan Real dan n pangkat/eksponen

$$\text{Jika } f(x) = ax^n \text{ maka } f'(x) = ax^{n-1}$$

Ini rumus
umum
turunan



Nahhh setelah Ananda merumuskan rumus umum turunan seperti di atas, maka dapat Ananda lihat untuk pengerjaan soal turunan dapat langsung menggunakan rumus tersebut.

Contoh. Tentukan turunan pertama dari

a) $y = 100$

Jawab $y' = 0$

b) $y = 19x - 5$

Jawab $y' = 19$

c) $y = 6x^3$

Jawab : $y' = 6(3)^{3-1} = 18x^2$

d) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$

Jawab: Untuk menjawab soal ini kita harus mengubah bentuk akar ke dalam bentuk pangkat pecahan.

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5x^{\frac{2}{3}}$$

Jadi Ananda punya koefisien = 5, pangkat = $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Maka } f'(x) &= 5\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} \\ f'(x) &= \frac{10}{3} x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{10}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

e) $f(x) = 2x - 15$

Jawab : Fungsi tersebut adalah fungsi linear maka $f'(x) = 2$

f) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 12x + 10$

Jawab :

$$f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 21(2)x^{2-1} - 12(1)x^{1-1} + 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 42x - 12$$

g) $f(x) = (2x + 3)(x^3 - 2x^2)$

Jawab:

Perhatikan bahwa soal ini merupakan perkalian dua fungsi berbeda, yaitu fungsi $2x + 3$ dan $x^3 - 2x^2$. Untuk menjawab soal ini Anda dapat mengalikan satu persatu tiap komponen fungsi terlebih dahulu, ini tidak sulit karena masing-masing fungsi yang berada di dalam kurung berpangkat satu. Setelah dikalikan maka fungsi $f(x)$ menjadi:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^3 - 6x^2$$

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2$$

Setelah ini baru kita turunkan

$$f'(x) = 2(4)x^{4-1} - 1(3)x^{3-1} - 6(2)x^{2-1}$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 12x$$

Nahhh bagaimana setelah Anda belajar sampai contoh terakhir ini..? mudah bukan mempelajari konsep turunan? Jadi kalo udah ketemu rumus umum turunannya, Anda gak perlu lagi pakai konsep limit dalam mencari turunan pertama. Langsung aja pakai tuh rumusnya. Oke.. ?? semangat...



ATURAN RANTAI

Anda perhatikan contoh soal bagian g). Seandainya fungsi $f(x)$ tersebut berpangkat lebih dari dua, tentu akan repot bagi Anda melakukan perkaliannya.

CONTOH SOAL 1. Tentukan turunan pertama dari :

$$f(x) = (2x + 3)^3$$

Nahh cara menyelesaikan soal ini Anda memisalkan,

Misal: $u = 2x + 3$

Maka $u' = \frac{du}{dx} = 2$  **notasi leibniz**

Fungsi di atas kita ganti dengan u sehingga:

$$f(x) = u^3$$

$$f'(x) = 3u^2 \frac{du}{dx} = 3u^2 (2) = 6u^2 = 6(2x + 3)^2$$

CONTOH SOAL 2. Tentukan $f'(x)$ dari:

$$f(x) = (3x - 5)\sqrt[3]{4x - 10}$$

Jawab:

$$\text{Misal } u = 3x - 5$$

$$v = \sqrt[3]{4x - 10} = (4x - 10)^{\frac{1}{3}}$$

$$u' = 3$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{3} (4x - 10)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (4) = \frac{4}{3} (4x - 10)^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} \\ &= \frac{4}{3} (4x - 10)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 3 \cdot (4x - 10)^{\frac{1}{3}} + (3x - 5) \cdot \frac{4}{3} (4x - 10)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = (4x - 10)^{\frac{1}{3}} \left(3 + \frac{4}{3} (3x - 5)(4x - 10)^{-1} \right)$$

C. Rangkuman

Berdasarkan paparan di atas, berikut merupakan rumus-rumus umum turunan yang dapat Anda ingat dan gunakan dalam menyelesaikan soal turunan. Misalkan f , u , v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I dan a adalah bilangan real, maka:

1. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
4. $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5. $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6. $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

D. Latihan Soal

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan benar dan teliti yaa

1. Jika diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, maka nilai dari $f'(1) = \dots$
2. Sebuah persegi dengan sisi x memiliki luas $f(x)$. Nilai $f'(6) = \dots$
Jawab:
3. Besar populasi di suatu daerah t tahun mendatang ditentukan oleh persamaan $p(t) = 10^3 t^2 - 5 \cdot 10^2 t + 10^6$. Laju pertumbuhan penduduk 5 tahun mendatang adalah..
4. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah ...
5. Diberikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ Jika $f'(0) = 2$, dan $f(2) = 6$
Tentukan nilai a , b dan c .

Pembahasan

Nomor	Pembahasan	Skoring
1	Diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, Dengan menggunakan aturan turunan dasar, maka turunan pertama dari fungsi $f(r)$ adalah $f'(r) = 2 \cdot \frac{3}{2} r^{\frac{3}{2}-1} - 2 \cdot \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}-1}$ $= 3r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}}$ $= 3\sqrt{r} - \frac{1}{r}$ Untuk $r = 1$ maka $f'(1) = 3\sqrt{1} - \frac{1}{1} = 3 - 1 = 2$	20
2	Penyelesaian Luas Persegi diayatakan dengan sisi kali sisi maka $f(x) = x \cdot x = x^2$ Dengan menggunakan rumus dasar turunan diperoleh $f'(x) = 2x$ Jadi nilai $f(6) = 2(6) = 12$	20
3	Penyelesaian $p(t) = 10^3 t^2 - 5 \cdot 10^2 t + 10^6$ turunan pertama dari $p(t)$ adalah $p'(t) = 2 \cdot 10^3 t^{2-1} - 5 \cdot 10^2$ Untuk $t = 5$ maka $p'(5) = 2 \cdot 10^3 \cdot 5 - 5 \cdot 10^2 = 15 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2$ $= 10.000 - 500 = 9.500$	20
4	Penyelesaian Diketahui $2m - n = 40$ Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi $n = 2m - 40$ Karena $p = m^2 + n^2$ maka $p = m^2 + (2m - 40)^2$ $p = m^2 + 4m^2 - 160m + 1600$ $p = 5m^2 - 160m + 1600$	20

	Agar p minimum maka turunan pertama harus bernilai nol $p = 5m^2 - 160m + 1600$ $p' = 10m - 160 = 0$ $10m = 160 \leftrightarrow m = \frac{160}{10} = 16$ Jadi nilai p minimum adalah $p = 5(16)^2 - 160(16) + 1600 = 1280 - 2560 + 1600 = 320$	
5	Penyelsaian Diketahui $(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$ Karena $f'(0) = 2$ maka $2a(0) + b = 2 \leftrightarrow b = 2$ dan $a = 1$ Karena $f(2) = 6$ maka $f(2) = 1(2)^2 + 2(2) + c = 6$ $f(2) = 4 + 4 + c = 6$ $f(2) = 8 + c = 6 \text{ maka } c = -2$ Jadi nilai a, b dan c berturut - turut adalah $a = 1$; $b = 2$ dan $c = -2$	20
SKOR TOTAL		100

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggung jawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda telah mampu memahami definisi turunan?		
2.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama fungsi aljabar linear?		
3.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama fungsi pecahan?		
4.	Apakah Ananda telah mampu menentukan turunan pertama dari fungsi berbentuk akar?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan aturan rantai?		
6.	Apakah Ananda telah mampu menyelesaikan soal yang berkaitan dengan turunan?		

EVALUASI

Pilih satu jawaban yang paling tepat (Sebaiknya Ananda kerjakan di buku latihan, tanyakan kepada guru Ananda apabila terdapat materi atau soal yang belum Ananda pahami)

1) Turunan Pertama dari $f(x) = (2 - 6x)^3$ adalah $f'(x) = \dots$

- A. $-18 (2 - 6x)^2$
- B. $-\frac{1}{2} (2 - 6x)^2$
- C. $3 (2 - 6x)^2$
- D. $18 (2 - 6x)^2$
- E. $-\frac{1}{2} (2 - 6x)^2$

Jawab: A

2) Diketahui

$f(x) = (2x - 3)^4$; $f'(x)$ merupakan turunan pertama dari $f(x)$. Nilai dari $f'(3) = \dots$

- A. 24
- B. 36
- C. 72
- D. 108
- E. 216

Jawab: E

3) Persamaan garis singgung kurva $y = 5x^2 + 2x - 12$ di titik $(2, 12)$ adalah

- A. $y = 32 - 22x$
- B. $y = 22x - 32$
- C. $y = 22x - 262$
- D. $y = 22x - 42$
- E. $y = 22x + 32$

Jawab: B

4) Jika $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+2x+1}$, maka $f'(2) = \dots$

A. $\frac{2}{9}$

B. $-\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{7}{27}$

E. $\frac{7}{4}$

Jawab : D

5) Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah ...

A. $5x + y + 7 = 0$

B. $5x + y + 3 = 0$

C. $5x + y - 7 = 0$

D. $3x - y - 4 = 0$

E. $3x - y - 5 = 0$

Jawab : C

6) Garis l menyinggung kurva $y = 6\sqrt{x}$ di titik yang berabsis 4. Titik potong garis l dengan sumbu x adalah ...

A. (4,0)

B. (-4, 0)

C. (12, 0)

D. (-6, 0)

E. (6, 0)

Jawab : C

7) Diketahui $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$, maka $y' = \dots$

A. $5x^3$

B. $3x^3 + 3x$

C. $2x^4 - 2x$

D. $x^4 + x^2 - x$

E. $5x^4 + 3x^2 - 2x$

Jawab : E

8) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 10$ maka $f'(x) = \dots$

A. $2x^2 - 3x + 1$

B. $6x^3 - 6x^2 + x$

C. $6x^2 - 6x - 10$

D. $6x^2 = 6x + 1$

E. $6x^2 - 6x + 9$

Jawab : C

9) Diketahui $f(x) = \frac{x^2+3}{2x+1}$. Jika $f'(x)$ menyatakan turunan pertama dari $f(x)$ maka $f(0) + 2f'(0) = \dots$

A. - 10

B. - 9

C. - 7

D. - 5

E. - 3

Jawabn : B

10) Jika garis singgung kurva $y = x\sqrt{5-x}$ di titik (4, 4) memotong sumbu x di titik (a, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, b), maka nilai a + b adalah ..

A. - 2

B. 0

C. 9

D. 16

E. 18

Jawab : D

11) Jika $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3}$, maka turunan pertama dari fungsi f di $x = 3$ adalah

$f'(3) = \dots$

A. $-1\frac{1}{2}$

B. $-\frac{5}{6}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{3}$

Jawab : D

- 12) Garis singgung pada kurva $y = \sqrt{x}$ di titik P membentuk sudut 45° dengan sumbu-x positif, koordinat titik singgungnya adalah...

A. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

C. $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

D. $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$

E. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$

Jawab: A

- 13) persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt{x} - 2$ di titik potong kurva itu terhadap sumbu x adalah...

A. $4x + 1$

B. $4x - 1$

C. $\frac{1}{4}x - 1$

D. $\frac{1}{4}x + 1$

E. $-\frac{1}{4}x - 1$

Jawab: C

- 14) Persamaan garis singgung kurva $y = 3 - x^2$ yang tegak lurus terhadap garis $4y = x + 1$ adalah

A. $y = 4x - 7$

B. $y = 4x + 7$

C. $y = -4x - 7$

D. $y = -4x + 7$

E. $y = -4x + 8$

Jawab: D

- 15) Persamaan garis singgung kurva $y = 2\sqrt{x}$ di titik dengan ordinat 2 adalah...

A. $y - x - 1 = 0$

B. $y - x + 1 = 0$

C. $y + x - 1 = 0$

D. $-y - x - 1 = 0$

E. $-y - x + 1 = 0$

Jawab: A

DAFTAR PUSTAKA

- Erlangga Fokus UN SMA/MA 2013 Program IPA. (2012). Jakarta: Erlangga.
- Erlangga X-Press UN 2015 SMA/MA Program IPA. (2014). Jakarta: Erlangga.
- Matematika Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan (2014). Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Siswanto. (2005). *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.
- Willa Adrian. (2008). *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.
- https://smatika.blogspot.com/2016/04/persamaan-garis-singgung-kurva_6.html
- <https://www.zenius.net/prologmateri/matematika/a/1222/Cara-Mencari-Titik-Singgung>



KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ANAK USIA DINI,
PENDIDIKAN DASAR DAN PENDIDIKAN MENENGAH
DIREKTORAT SEKOLAH MENENGAH ATAS
2020



Modul Pembelajaran SMA

Matematika Umum



KELAS
XI



APLIKASI TURUNAN FUNGSI ALJABAR MATEMATIKA UMUM KELAS XI

PENYUSUN

**Dr. Yuyun Sri Yuniarti, M.Pd.
SMA Negeri 1 Pedes
Kabupaten Karawang**

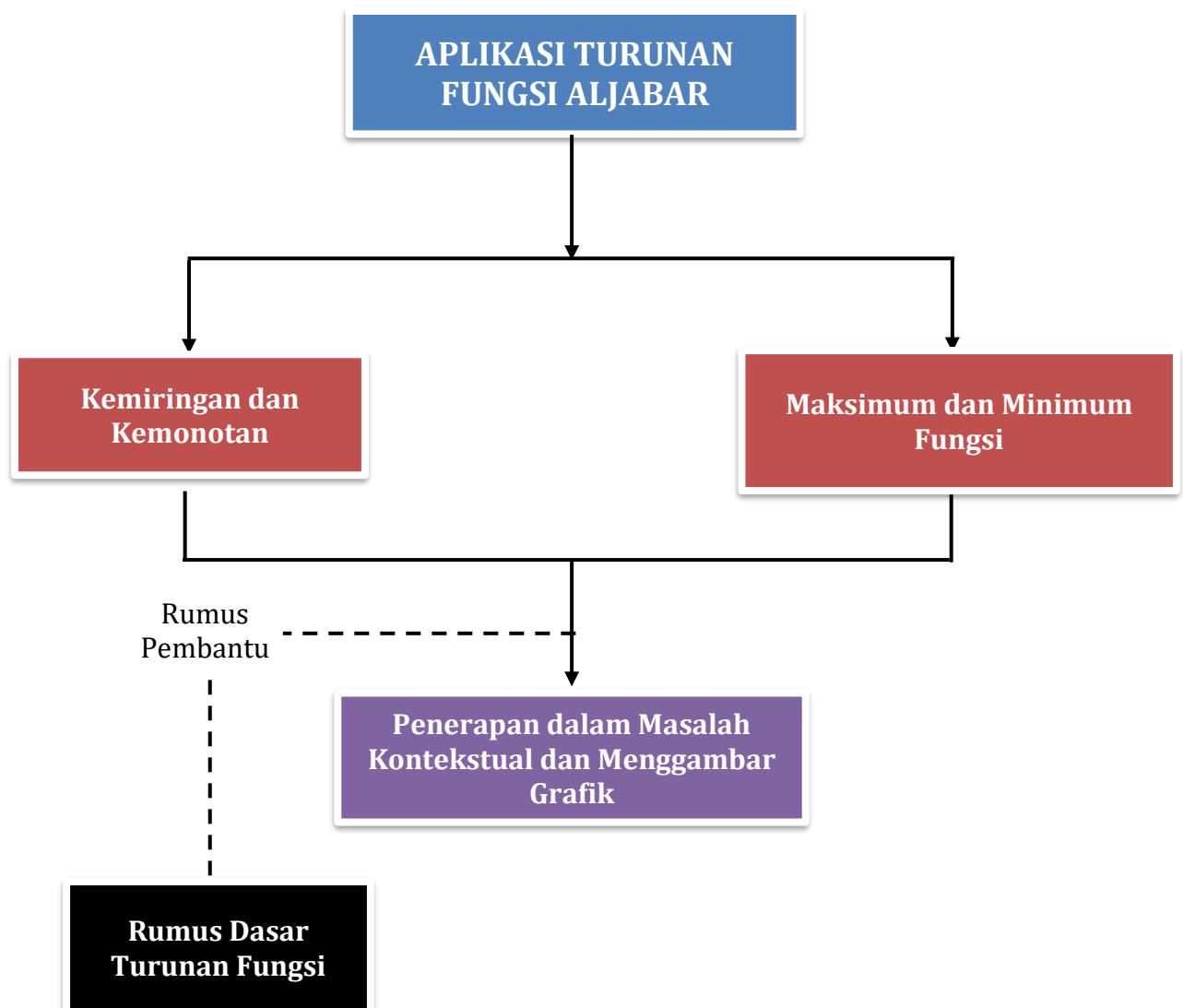
DAFTAR ISI

PENYUSUN	2
DAFTAR ISI	3
GLOSARIUM	4
PETA KONSEP	5
PENDAHULUAN	6
A. Identitas Modul	6
B. Kompetensi Dasar	6
C. Deskripsi Singkat Materi	6
D. Petunjuk Penggunaan Modul	7
E. Materi Pembelajaran	7
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1	9
Kemiringan Garis Singgung dan Kemonoton Fungsi Aljabar	9
A. Tujuan Pembelajaran	9
B. Uraian Materi	9
C. Rangkuman	14
D. Latihan Soal	15
E. Penilaian Diri	22
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2	23
Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar	23
A. Tujuan Pembelajaran	23
B. Uraian Materi	23
C. Rangkuman	29
D. Latihan Soal	30
E. Penilaian Diri	39
KEGIATAN PEMBELAJARAN 3	40
Menggambar Grafik Fungsi Aljabar	40
A. Tujuan Pembelajaran	40
B. Uraian Materi	40
C. Rangkuman	42
D. Latihan Soal	42
E. Penilaian Diri	45
EVALUASI	46
DAFTAR PUSTAKA	51

GLOSARIUM

Fungsi naik	: Sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke atas atau naik
Fungsi turun	: Sebarang fungsi $f(x)$ dimana x bergerak ke kanan, maka grafik fungsi tersebut bergerak ke bawah atau turun
Gradien	: Kemiringan, ukuran seberapa cepat nilai fungsinya berubah; nilai turunan fungsi di titik singgungnya
Garis singgung	: Kurva bidang pada titik yang diketahui ialah garis lurus yang “hanya menyentuh” kurva pada titik tersebut
Garis normal	: Garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung
Nilai maksimum	: Nilai terbesar dari suatu fungsi pada interval tertentu
Nilai minimum	: Nilai terkecil dari suatu fungsi pada interval tertentu
Titik stasioner	: Titik pada kurva yang mengakibatkan kurva tersebut tidak naik dan tidak turun.
Turunan	: Laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya.

PETA KONSEP



PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Umum
Kelas : XI
Alokasi Waktu : 12 JP
Judul Modul : Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar

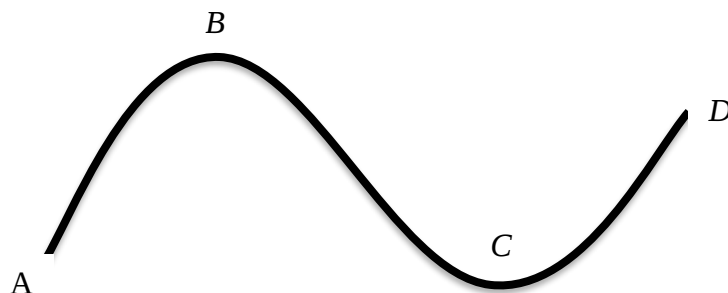
B. Kompetensi Dasar

- 3.9 Menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum dan selang kemonotonan fungsi serta kemiringan garis singgung.
- 4.9 Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan selang kemonotonan fungsi serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva berkaitan dengan masalah kontekstual

C. Deskripsi Singkat Materi

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva. Untuk memahami apa yang akan Ananda pelajari dalam modul ini, perhatikan ilustrasi berikut.

Coba bayangkan ketika Ananda mendaki gunung. Ananda akan memulainya di kaki gunung, kemudian perlahan bergerak ke atas sampai tiba di puncak gunung. Ketika berada di puncak gunung Ananda merasa berada di titik paling atas bukan? Nahh setelah itu Ananda turun kembali menuju lembah sampai tiba di kaki gunung kembali. Pergerakan Ananda mendaki gunung dapat diilustrasikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 1 Ilustrasi fungsi naik dan turun

Dari ilustrasi tersebut, ketika Ananda bergerak dari titik A menuju ke titik B, Ananda akan bergerak naik hingga sampai puncak, kemudian Ananda bergerak dari titik B ke titik C, pergerakan Ananda akan turun, demikian juga ketika Ananda bergerak dari titik C ke D Ananda akan bergerak naik. Deskripsi ini menggambarkan fungsi naik untuk pergerakan dari A ke B, fungsi turun untuk pergerakan dari B ke C. Dari Gambar tersebut juga dapat kita lihat terdapat puncak dan lembah. Nahh ketika Ananda berada di puncak berarti Ananda akan berada di titik maksimum, demikian juga ketika Ananda berada di bawah akan berada di titik minimum. Inilah yang disebut titik ekstrim atau titik puncak yang bisa berarti maksimum atau minimum.

Terdapat berbagai pemanfaatan aplikasi turunan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu:

- Salah satu penerapan turunan yang paling umum adalah penentuan nilai maksimum dan minimum. Hal tersebut dapat diamati dengan seberapa sering kita mendengar atau membaca istilah keuntungan terbesar, biaya terkecil, kekuatan terbesar, dan jarak terjauh. Nilai balik maksimum suatu fungsi pada domain f dapat berupa nilai maksimum mutlak atau nilai maksimum relatif. Begitupun dengan nilai minimum, dapat berupa nilai minimum mutlak dan nilai minimum relatif. Jika dalam interval tertentu terdapat dua nilai maksimum atau lebih, nilai maksimum mutlak (absolut) adalah nilai tertinggi sedangkan yang lainnya merupakan nilai maksimum relatif, begitupun sebaliknya. Jika terdapat dua atau lebih nilai minimum pada suatu fungsi, maka titik terendah merupakan nilai minimum mutlak (absolut), sedangkan yang lainnya merupakan nilai minimum relatif.
- Turunan dapat digunakan untuk menentukan kecepatan dan percepatan sehingga sering digunakan dalam pekerjaan dan penelitian yang membutuhkan ilmu fisika. Selain itu percepatan juga digunakan dalam menghitung laju percepatan pada kegiatan lempar lembing, lempar cakram, menembak, dan lain – lain. Setiap waktu dan percepatannya mempunyai nilai yang dapat diketahui melalui fungsi turunan.
- Dalam membuat konstruksi bangunan, percampuran bahan bangunan yang di lakukan oleh arsitek, pembuatan tiang – tiang, langit langit, ruangan, dan lain lain menggunakan turunan sehingga bangunan terlihat cantik dan kokoh (optimal). Pembuatan kapal, pesawat, dan kendaraan lainnya menggunakan turunan.
- Kegunaan penurunan, terdapat juga pada quick count. Dalam perhitungan tersebut, terdapat juga perhitungan yang baik sehingga dapat mempunyai perhitungan yang maksimal.
- Dalam dunia penerbangan, turunan mempunyai fungsi terpenting untuk menentukan laju pesawat dengan cepat. Pesawat akan mengikuti navigasi dari tower yang berada di bandara. Setiap laju pesawat akan terdeteksi pada navigasi (menggunakan perhitungan kalkulus otomatis) sehingga laju pesawat tidak salah arah dan percepatannya sesuai dengan panduan dari tower. (Brainly.co.id)

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini dirancang untuk memfasilitasi Ananda dalam melakukan kegiatan pembelajaran secara mandiri. Untuk menguasai materi ini dengan baik, ikutilah petunjuk penggunaan modul berikut.

1. Berdoalah sebelum mempelajari modul ini.
2. Pelajari uraian materi yang disediakan pada setiap kegiatan pembelajaran secara berurutan.
3. Perhatikan contoh-contoh penyelesaian permasalahan yang disediakan dan kalau memungkinkan cobalah untuk mengerjakannya kembali.
4. Kerjakan latihan soal yang disediakan, kemudian cocokkan hasil pekerjaan Ananda dengan kunci jawaban dan pembahasan pada bagian akhir modul.
5. Jika menemukan kendala dalam menyelesaikan latihan soal, cobalah untuk melihat kembali uraian materi dan contoh soal yang ada.
6. Setelah mengerjakan latihan soal, lakukan penilaian diri sebagai bentuk refleksi dari penguasaan Ananda terhadap materi pada kegiatan pembelajaran.
7. Di bagian akhir modul disediakan soal evaluasi, silahkan mengerjakan soal evaluasi tersebut agar Ananda dapat mengukur penguasaan terhadap materi pada modul ini. Cocokkan hasil pengerjaan dengan kunci jawaban yang tersedia.
8. Ingatlah, keberhasilan proses pembelajaran pada modul ini tergantung pada kesungguhan Ananda untuk memahami isi modul dan berlatih secara mandiri.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi 3 kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan dan soal evaluasi.

Pertama : Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotonan Fungsi Aljabar

Kedua : Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar

Ketiga : Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotonan Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi aljabar dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva dan selang kemonotonan fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar ada materi prasyarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar beserta sifat-sifatnya.



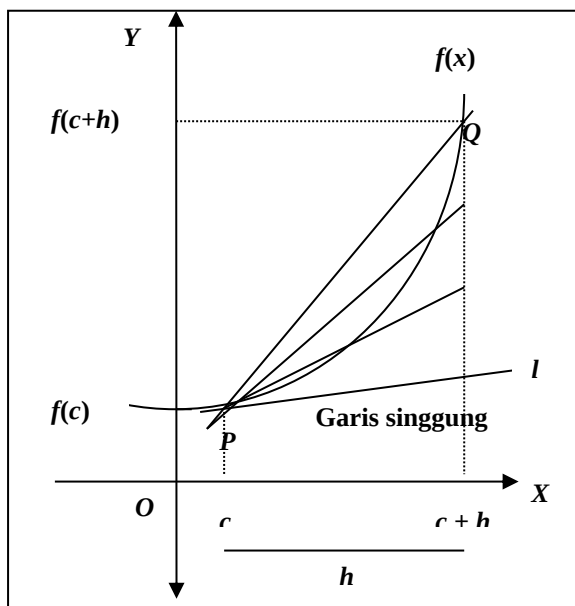
Rumus Turunan Fungsi Aljabar serta Sifat-sifatnya

Misalkan f , u , dan v fungsi dari x bernilai real serta dapat diturunkan dan a konstanta bilangan real, maka berlaku:

- $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$
- $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$
- $f(x) = au^n \Rightarrow f'(x) = an u^{n-1} \cdot u'$
- $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!



Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c+h, f(c+h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P . Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$\begin{aligned} m = f'(c) &= \lim_{h \rightarrow 0} m_{PQ} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung.

Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.



Catatan:

Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- ❖ Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ sejajar garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h , maka $m_1 = m_2$.
- ❖ Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h , maka $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^2 + 2x - 2$ di titik $(1, 1)$.

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y
 $y = x^2 + 2x - 2$
 $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$
- ❖ Tentukan gradien garis singgung m
 $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$
 $m = 2(1) + 2 = 4$
- ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2 .

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1.

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
 $\text{Absis} = x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$
 $\phantom{\text{Absis} = x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = } = 2(1)^3 - 5(1)^2 - (1) + 6$
 $\phantom{\text{Absis} = x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = } = 2$
 Jadi, titik singgungnya adalah $(1, 2)$.

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi y

$y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$, maka

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x - 1$$

- ❖ Tentukan gradien m

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \\ &= 6(1)^2 - 10(1) - 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan persamaan garis singgung

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ \Leftrightarrow y - 2 &= -5(x - 1) \\ \Leftrightarrow y - 2 &= -5x + 5 \\ \Leftrightarrow 5x + y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan persamaan garis normal

$$\begin{aligned} y - y_1 &= -\frac{1}{m}(x - x_1) \\ \Leftrightarrow y - 2 &= -\frac{1}{5}(x - 1) \\ \Leftrightarrow 5y - 10 &= -x + 1 \\ \Leftrightarrow x + 5y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

- ❖ Kesimpulan

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah $5x + y - 7 = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $x + 5y - 11 = 0$.

Contoh 3

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$.

Penyelesaian :

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi y

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 3 \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan gradien garis singgung

Misal garis h : $x + 2y + 2 = 0$

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow m_h = -\frac{1}{2}$$

Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka

$$\begin{aligned} m_g \cdot m_h &= -1 \\ m_g \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= -1 \\ m_g &= 2 \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

$$m_g = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}$$

$$2 = 2x$$

$$x = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^2 + 3 = 4$$

Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (1, 4)$

- ❖ Tentukan persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m_g(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 4 = 2(x - 1)$$

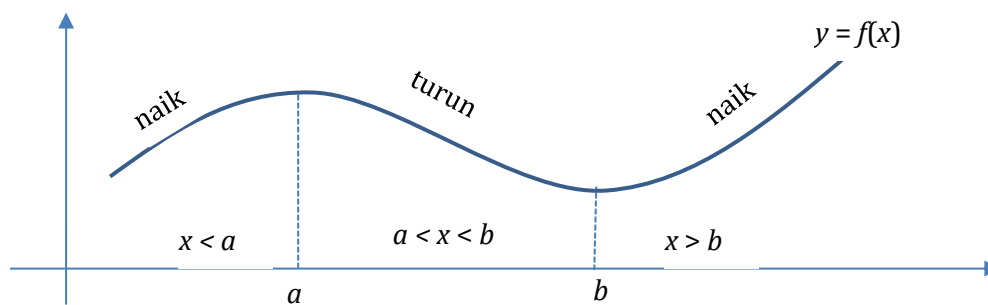
$$\Leftrightarrow y = 2x + 2$$

❖ Kesimpulan

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$ adalah $y = 2x + 2$.

Kemonoton Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Anda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Anda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.



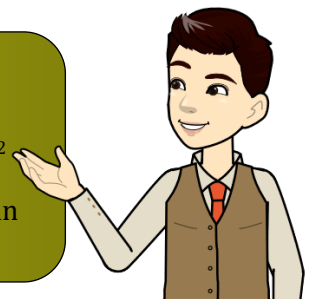
Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I .

- Fungsi f disebut **naik** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I , dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan **turun** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I , dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.



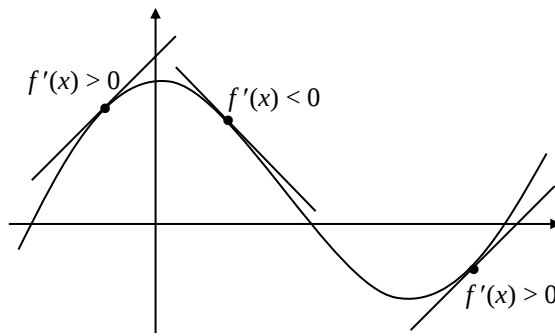
Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x . Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3, jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan. Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Anda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I .

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I , maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I , maka f merupakan fungsi turun.





Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi aljabar, pelajari contoh berikut.

Contoh 4

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$.

Penyelesaian :

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 15, \text{ maka}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

- ❖ Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2$$

- ❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

$$f'(-1) = 9$$

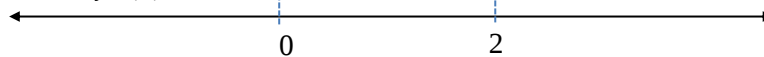
$$f'(1) = -3$$

$$f'(3) = 9$$

$$f'(x) > 0$$

$$f'(x) < 0$$

$$f'(x) > 0$$



- ❖ Kesimpulan

- syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < 0$ atau $x > 2$
- syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $0 < x < 2$.

Contoh 5

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Penyelesaian

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}, \text{ menggunakan aturan pembagian, diperoleh}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 3)(1)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$$

❖ Tentukan titik-titik kritis

- Titik stasioner $f'(x) = 0$

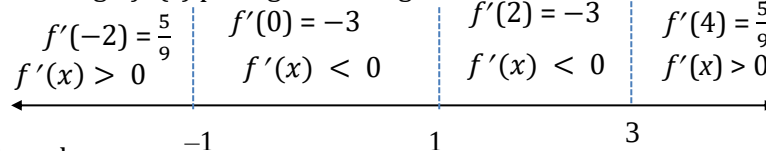
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 3$$

- Titik singular

$$\Leftrightarrow (x-1) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 1$$

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

❖ Kesimpulan

- syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < -1$ atau $x > 3$
- syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$.

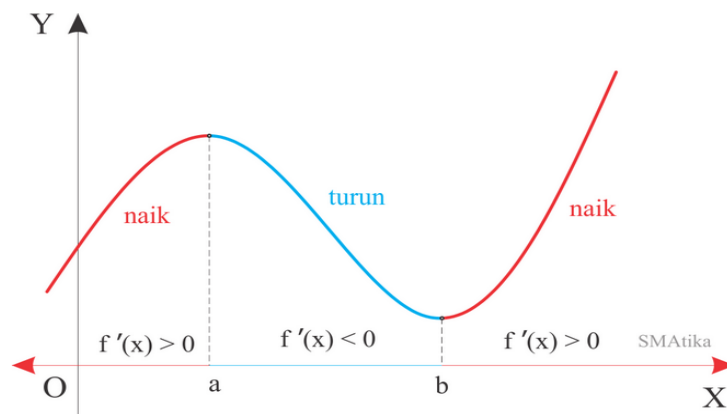
C. Rangkuman

❖ Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$ ❖ Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=x_1}$ ❖ Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.❖ Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I .

- Fungsi f disebut **naik** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I , dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan **turun** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I , dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

❖ Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I .

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I , maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I , maka f merupakan fungsi turun.



D. Latihan Soal

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

- Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 2$ di titik $(1, 1)$ adalah
 - 2
 - 1
 - 0
 - 1
 - 2
- Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$ adalah ...
 - $5x + 2y + 5 = 0$
 - $5x - 2y - 5 = 0$
 - $5x + 2y - 5 = 0$
 - $3x + 2y - 3 = 0$
 - $3x - 2y - 3 = 0$
- Persamaan garis singgung pada kurva $y = -2x^2 + 6x + 7$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 13 = 0$ adalah
 - $2x + y + 15 = 0$
 - $2x + y - 15 = 0$
 - $2x - y - 15 = 0$
 - $4x - 2y + 29 = 0$
 - $4x + 2y - 29 = 0$
- Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + px + q$, dengan p dan q konstanta. Garis $y = -3x + 5$ menyinggung kurva itu di titik dengan absis 1. Nilai p adalah
 - 5
 - 3
 - 2
 - 3
 - 5
- Persamaan garis normal dari kurva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada titik $(8, 2)$ adalah
 - $3y - 2x + 10 = 0$
 - $3y + 4x - 38 = 0$
 - $6y - x + 4 = 0$
 - $12y - x - 16 = 0$
 - $y + 12x - 98 = 0$
- Jika $f(x) = x^2 - 6x + 8$, maka fungsi akan naik pada interval ...
 - $x < 3$
 - $x > 3$
 - $x < 6$
 - $x > 6$
 - $x > -3$
- Grafik fungsi $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ turun pada interval...
 - $-5 < x < 3$
 - $3 < x < 5$
 - $x < -5$ atau $x > 3$
 - $x < -3$ atau $x > 5$
 - $x < 3$ atau $x > 5$
- Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ naik pada interval ...
 - $x > -2$
 - $x > 3$
 - $x < -2$

- D. $x < -2$ atau $x > 3$
E. $-2 < x < 3$
9. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ turun pada interval ...
A. $x < 0$ atau $2 < x < 4$
B. $x < 0$
C. $x < 4$
D. $x > 2$
E. $x < 2$
10. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, maka nilai $a + b = ..$
A. 29
B. 16
C. 13
D. 3
E. -13

Pembahasan Latihan Soal Kegiatan Belajar 1

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 2$ di titik $(1, 1)$ adalah

Jawaban: C

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama dari fungsi y

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$$

- ❖ Tentukan gradien garis singgung m

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$$

$$m = 2(1) - 2 = 0$$

- ❖ Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 0 .

2. Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$

adalah

Jawaban: C

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

$$\begin{aligned} \text{Absis} = x_1 = 1 &\Rightarrow y_1 = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{1^2} - \sqrt{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, titik singgungnya adalah $(1, 0)$

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi y

$$y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} = x^{-2} - x^{\frac{1}{2}}, \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan gradien m

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \\ &= -\frac{2}{1^3} - \frac{1}{2\sqrt{1}} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 0 = -\frac{5}{2}(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2y = -5x + 5$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2y - 5 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung yang diminta adalah $5x + 2y - 5 = 0$.

3. Persamaan garis singgung pada kurva $y = -2x^2 + 6x + 7$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 13 = 0$ adalah

Jawaban: B

Penyelesaian :

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi y

$$y = -2x^2 + 6x + 7$$

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 6$$

- ❖ Tentukan gradien garis singgung

Misal garis $h: x - 2y + 13 = 0$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \Rightarrow m_h = \frac{1}{2}$$

Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka

$$m_g \cdot m_h = -1$$

$$m_g \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$m_g = -2$$

- ❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

$$m_g = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}$$

$$-2 = -4x + 6$$

$$4x = 8$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -2(2)^2 + 6(2) + 7 = 11$$

Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (2, 11)$

- ❖ Tentukan persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m_g (x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - 11 = -2 (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = -2x + 15$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0$$

4. Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + px + q$, dengan p dan q konstanta. Garis $y = -3x + 5$ menyinggung kurva itu di titik dengan absis 1. Nilai p adalah

Jawaban: E

Penyelesaian:

Gradien garis $y = -3x + 5$ adalah $m = -3$.

$y = x^2 + px + q$, maka

$$\frac{dy}{dx} = 2x + p \text{ dan}$$

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$$

$$\Leftrightarrow -3 = 2(1) + p$$

$$\Leftrightarrow p = -5$$

Jadi, nilai p adalah -5 .

5. Persamaan garis normal dari kurva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pada titik $(8, 2)$ adalah

Jawaban: E

Penyelesaian

- ❖ Tentukan gradien m

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, maka $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$. Karena garis melalui titik $(8, 2)$, maka

$$\begin{aligned}
 m &= f'(8) \\
 &= \frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{1}{3} (2^3)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{1}{3} (2)^{-2} \\
 &= \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

- ❖ Tentukan persamaan garis normal

Garis normal dengan gradien $m = \frac{1}{12}$ dan melalui titik (8, 2) adalah

$$\begin{aligned}
 y - y_1 &= -\frac{1}{m} (x - x_1) \\
 \Leftrightarrow y - 2 &= -12 (x - 8) \\
 \Leftrightarrow y &= -12x + 98 \\
 \Leftrightarrow y + 12x - 98 &= 0
 \end{aligned}$$

6. Jika $f(x) = x^2 - 6x + 8$, maka fungsi akan naik pada interval

Jawaban: B

Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = x^2 - 6x + 8$ maka $f'(x) = 2x - 6$

Fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$

Maka $2x - 6 > 0$

$$2x > 6$$

$$x > 3$$

7. Grafik fungsi $y = x^3 + 3x^2 - 45x$ turun pada interval...

Jawaban : A

Penyelesaian:

Syarat fungsi turun adalah $f'(x) < 0$ sehingga kita turunkan fungsi y pada soal diatas.

$$y' = 3x^2 + 6x - 45 < 0 \text{ atau}$$

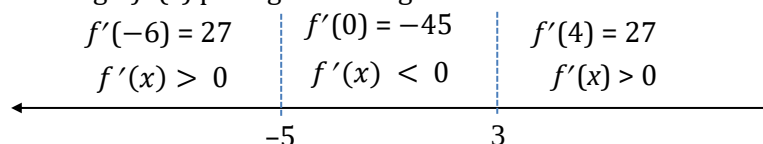
$$3(x^2 + 2x - 15) < 0$$

$(x - 3)(x + 5) < 0$ agar mudah kita abaikan dulu tanda pertidaksamaannya sehingga:

$$x - 3 = 0 \text{ atau } x + 5 = 0.$$

$$x = 3 \text{ atau } x = -5$$

- ❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan



- ❖ Kesimpulan

syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-5 < x < 3$.

8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ naik pada interval

Jawaban: D

Penyelesaian:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

$$f(x) \text{ naik} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 > 0$$

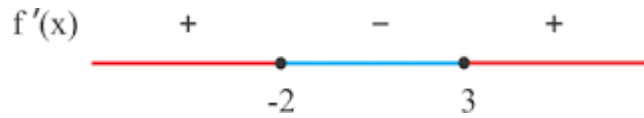
Pembuat nol :

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 3$$



Jadi $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 3$

9. Fungsi $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$ turun pada interval

Jawaban: A

Penyelesaian:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$

fungsi $f(x)$ akan turun jika $f'(x) < 0$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 32x < 0$$

Pembuat nol :

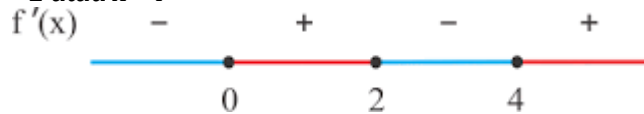
$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x - 2 = 0 \text{ atau } x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2 \text{ atau } x = 4$$



Ambil titik di sebelah kiri 0 misalnya titik -1, maka $f'(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 8(-1) = -1 - 6 - 8 = -15$ (ini bernilai < 0)

Ambil titik di antara 0 dan 2, misalnya titik 1, maka $f'(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 8(1) = 1 - 6 + 8 = 3$ (ini bernilai > 0) dst sehingga di dapat seperti pada gambar di atas.

Jadi, $f(x)$ turun pada interval $x < 0$ atau $2 < x < 4$

10. Fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, maka nilai $a + b = ..$

Jawaban: D

Penyelesaian:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$f(x)$ turun hanya pada interval $\frac{2}{3} < x < 8$, berarti $f(x)$ naik pada $x > \frac{2}{3}$ dan $x < 8$, dan

$f(x)$ stasioner pada $x = \frac{2}{3}$ dan $x = 8$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f(x)$ stasioner pada $x = \frac{2}{3}$ dan $x = 8$, maka

$$f'(\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow 3(\frac{2}{3})^2 + 2a(\frac{2}{3}) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{3}a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4a + 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + 3b = -4 \quad \dots (i)$$

$$f'(8) = 0 \Leftrightarrow 3(8)^2 + 2a(8) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 192 + 16a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 16a + b = -192 \quad \dots (ii)$$

Eliminasi (i) dan (ii) diperoleh

$$\begin{array}{r|l} 4a + 3b = -4 & \times 4 \\ 16a + b = -192 & \times 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16a + 12b = -16 \\ 16a + b = -192 \\ \hline 11b = 176 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow b = 16$$

Substitusi $b = 16$ ke persamaan (i), diperoleh

$$4a + 3b = -4 \Leftrightarrow 4a + 3(16) = -4 \Leftrightarrow a = -13$$

Jadi, nilai $a + b = 3$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan turunan fungsi aljabar ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan kemiringan garis singgung suatu kurva ?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis singgung pada fungsi aljabar?		
4.	Apakah Ananda mampu menentukan persamaan garis normal pada fungsi aljabar?		
5.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi naik pada fungsi aljabar ?		
6.	Apakah Ananda mampu menentukan interval fungsi turun pada fungsi aljabar ?		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,

Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

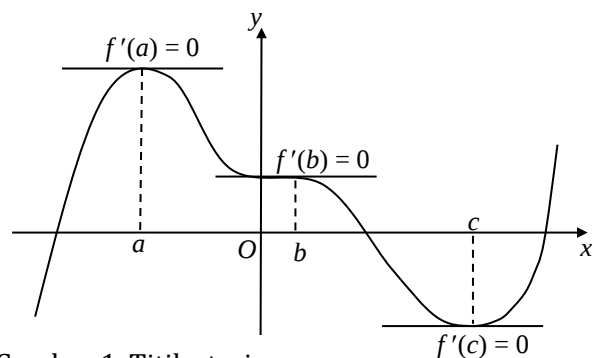
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum dan nilai minimum dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum berkaitan dengan masalah kontekstual.

B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Aljabar

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar disamping.

Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:

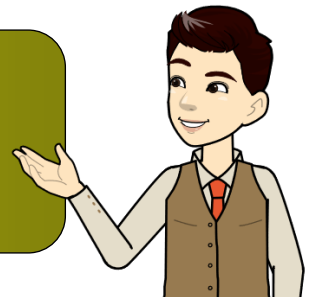


Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan

- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner



Contoh 1

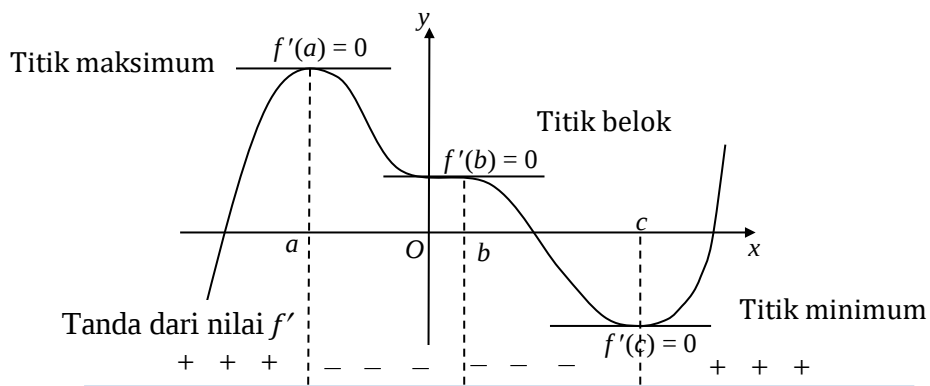
Tentukan nilai dan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 8$.

Penyelesaian:

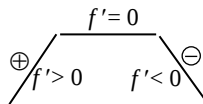
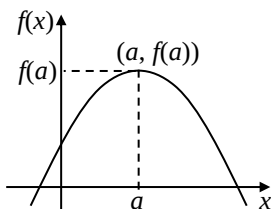
- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
 $f(x) = x^3 - 12x + 8$, maka
 $f'(x) = 3x^2 - 12$
- ❖ Syarat stasioner
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow 3(x^2 - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow 3(x+2)(x-2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 2$
- ❖ Menentukan nilai stasioner
 $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = 24$
 $x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^3 - 12(2) + 8 = -8$
- ❖ Kesimpulan
 - Nilai stasionernya adalah -8 dan 24
 - Titik stasionernya $(2, -8)$ dan $(-2, 24)$

Menentukan Titik Maksimum dan Titik Minimum

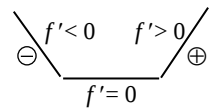
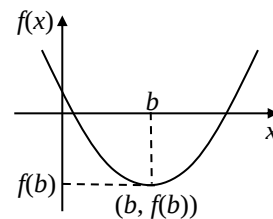
Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.



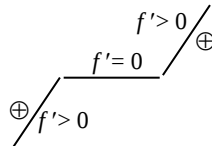
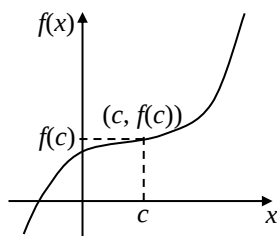
Titik Balik Maksimum



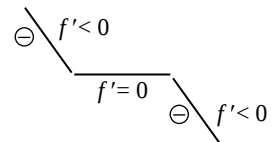
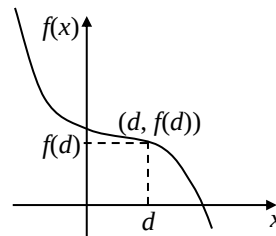
Titik Balik Minimum



Titik Belok Naik



Titik Belok Turun

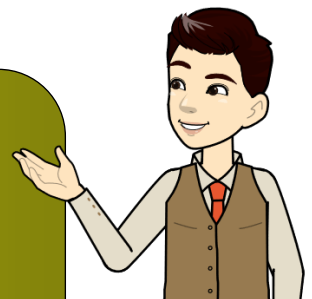


Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Sifat 1

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f' , maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horizontal.



Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Tentukan titik balik maksimum dan minimum dari fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Penyelesaian :

- ❖ Tentukan turunan pertama

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$$

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

- ❖ Syarat titik stasioner

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ atau } x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = -3$$

- ❖ Menentukan titik stasioner

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 = -7\frac{1}{3}$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 = 13\frac{1}{2}$$

Jadi, ada dua titik stasioner, yaitu $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$ dengan nilai stasionernya $-7\frac{1}{3}$ dan

$\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$ dengan nilai stasionernya $13\frac{1}{2}$.

- ❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

X	$x < -3$	-3	$-3 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
<i>gradien</i>					

↑
maksimum

↑
minimum

- ❖ Kesimpulan

➤ $f(-3) = 13\frac{1}{2}$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari +

(positif) ke - (negatif) dan titik balik maksimumnya adalah $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$

➤ $f(2) = -7\frac{1}{3}$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari -

(negatif) ke + (positif) dan titik balik minimum adalah $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$.

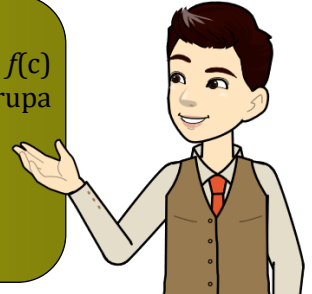
Nilai Maksimum dan Minimum suatu Fungsi pada Interval Tertutup $[a, b]$

Biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan akan mempunyai interval $I = [a, b]$ sebagai daerah asalnya. Nilai-nilai ekstrem sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup sering kali terjadi pada titik-titik ujung interval.

Sifat 2

Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c . Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:

- titik ujung dari I
- titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$)
- titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada)



Tahapan menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ adalah sebagai berikut.

- 1) Selesaikan $f'(x)$
- 2) Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[a, b]$, yaitu
 - a) Titik ujung interval, $x = a$ dan $x = b$
 - b) Titik stasioner $c \in [a, b]$, dengan $f'(c) = 0$
 - c) Titik singular $d \in [a, b]$, dengan $f'(d)$ tidak ada
- 3) Hitung nilai fungsi $f(x)$ pada semua titik kritis yang diperoleh pada langkah 2). Nilai terbesar dan terkecil yang dihasilkan merupakan nilai maksimum dan minimum fungsi f .

Contoh 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 1$.

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, maka
 $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$
 $= 6(2x^2 - x - 1)$
 $= 6(x + 1)(2x - 1)$
- ❖ Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[-2, 1]$, yaitu
 1. Titik ujung interval, $x = -2$ dan $x = 1$
 2. Titik stasioner
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 1)(2x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = \frac{1}{2}$
 3. Tidak ada titik singular
- ❖ Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
$x = -2$	$f(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 1 = -7$
$x = -1$	$f(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{3}{4}$
$x = 1$	$f(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 6(1) + 1 = 2$
- ❖ Kesimpulan
 - $f(-2) = -7$ merupakan nilai minimum
 - $f(-1) = 6$ merupakan nilai maksimum.

Maksimum dan Minimum pada Masalah Kontekstual

Dalam hidup ini, kita sering menghadapi masalah guna mendapatkan jalan terbaik untuk melakukan sesuatu. Sebagai contoh, seorang petani ingin memilih kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter akan menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya pendistribusian produknya. Kadangkala salah satu dari masalah di atas dapat dirumuskan sehingga akan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tertentu.

Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.

- ❖ Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
- ❖ Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
- ❖ Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
- ❖ Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

Berikut diberikan beberapa contoh maksimum dan minimum pada masalah kontekstual.

Contoh 4

Akan dibuat sebuah persegi panjang dengan keliling 48 cm. Berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum ?

Penyelesaian :

$$K = 2(p + l) = 48 \Rightarrow p + l = 24$$

$$\Rightarrow l = 24 - p \quad \text{..... (*)}$$

Luas persegi panjang :

$$\begin{aligned} L &= p \cdot l \\ &= p \cdot (24 - p) \\ &= 24p - p^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{dp} = 24 - 2p$$

Syarat ekstrim untuk L adalah $\frac{dL}{dp} = 0$, sehingga :

$$\begin{aligned} 24 - 2p &= 0 \\ 2p &= 24 \\ p &= 12 \end{aligned}$$

Substitusikan $p = 12$ ke (*), sehingga diperoleh : $l = 24 - 12 = 12$.

Jadi, ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum adalah $p = 12$ cm, $l = 12$ cm, dan luas persegi panjang = $12 \cdot 12 = 144$ cm².

Contoh 5

Jumlah dua buah bilangan adalah 10. Tentukan kedua bilangan tersebut sehingga jumlah kuadratnya paling minimum.

Penyelesaian :

Misalkan bilangan pertama = x dan bilangan kedua = y

Jumlah kedua bilangan 10, sehingga $x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$ (*)

Misalkan jumlah kuadrat kedua bilangan = B , maka :

$$B = x^2 + y^2 \quad \dots\dots (*)$$

Substitusikan persamaan (*) ke (**), sehingga diperoleh :

$$B = x^2 + (10 - x)^2$$

$$B = x^2 + (100 - 20x + x^2) = 2x^2 - 20x + 100$$

$$\frac{dB}{dx} = 4x - 20$$

syarat ekstrim untuk B adalah $\frac{dB}{dx} = 0$,

$$\text{sehingga : } 4x - 20 = 0$$

$$\rightarrow 4x = 20$$

$$\rightarrow x = 5$$

substitusikan $x = 5$ ke (*) sehingga diperoleh : $y = 10 - 5 = 5$

Jadi, kedua bilangan tersebut agar jumlah kuadratnya minimum adalah 5 dan 5.

Contoh 6

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Tinggi h meter setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 120t - 5t^2$, tentukanlah tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut.

Penyelesaian :

Tinggi peluru : $h(t) = 120t - 5t^2 \quad \dots\dots (*)$

$$h'(t) = 120 - 10t$$

peluru mencapai tinggi maksimum jika $h'(t) = 0$, sehingga :

$$120 - 10t = 0 \Leftrightarrow 120 = 10t \Leftrightarrow t = \frac{120}{10} = 10 \text{ detik}$$

Substitusikan $t = 10$ detik ke (*), sehingga diperoleh tinggi maksimum peluru :

$$h(10) = 120(10) - 5(10)^2 = 1200 - 500 = 700 \text{ meter.}$$

Contoh 7

Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari bahan seng dengan kapasitas 36 dm^3 . Jika ukuran panjang kotak dua kali lebarnya, tentukanlah ukuran kotak agar bahan yang dibutuhkan seminimum mungkin.

Penyelesaian :

Misalkan panjang = p , lebar = l , dan tinggi = t .

Panjang kotak dua kali lebarnya, berarti $p = 2l \quad \dots\dots (*)$

Volume kotak = 36 dm^3

$$p \cdot l \cdot t = 36 \rightarrow (2l) \cdot l \cdot t = 36 \rightarrow t = \frac{36}{2l^2} \rightarrow t = \frac{18}{l^2} \quad \dots\dots (**)$$

Bahan kotak akan diminimumkan, berarti yang diminimumkan adalah luas permukaan kotak tanpa tutup, disimbol dengan A .

$A = \text{luas alas} + 2 \text{ luas sisi samping} + 2 \text{ luas sisi depan/belakang}$

$$A = p \cdot l + 2 l \cdot t + 2 p \cdot t \quad \dots\dots (***)$$

Substitusikan (*) dan (**) ke persamaan (***), sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} A &= (2l) \cdot l + 2l \cdot \left(\frac{18}{l^2}\right) + 2(2l) \cdot \left(\frac{18}{l^2}\right) \\ &= 2l^2 + \frac{36}{l} + \frac{72}{l} \end{aligned}$$

$$= 2l^2 + \frac{108}{l}$$

$$\frac{dA}{dl} = 4l - 108l^{-2} = 4l - \frac{108}{l^2}$$

Luas permukaan kotak minimum jika $\frac{dA}{dl} = 0$, sehingga

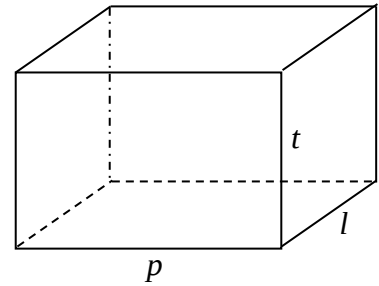
:

$$\begin{aligned} 4l - \frac{108}{l^2} &= 0 &\Leftrightarrow & 4l = \frac{108}{l^2} \\ &&\Leftrightarrow & 4l^3 = 108 \\ &&\Leftrightarrow & l^3 = \frac{108}{4} = 27 \\ &&\Leftrightarrow & l = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ dm.} \end{aligned}$$

substitusikan $l = 3$ dm ke (*) dan (**), diperoleh : $p = 2(3) = 6$ m dan

$$t = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2 \text{ dm.}$$

Jadi, ukuran kotak agar bahan yang digunakan minimum adalah $p = 6$ dm, $l = 3$ dm, dan $t = 2$ dm.



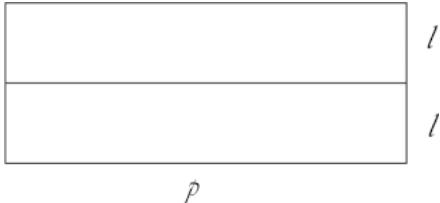
C. Rangkuman

- ❖ Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
 - Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
 - Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner
- ❖ Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$
 - Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
 - Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
 - Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f' , maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.
- ❖ Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c . Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:
 - titik ujung dari I
 - titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$)
 - titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada)
- ❖ Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.
 - Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
 - Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
 - Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
 - Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

D. Latihan Soal

Pilih satu jawaban yang paling tepat.

- Nilai stasioner dari fungsi $y = x^3 - x^2 - 8x$ diperoleh pada
 - $x = 4$ dan $x = -\frac{2}{3}$
 - $x = \frac{4}{3}$ dan $x = 2$
 - $x = \frac{4}{3}$ dan $x = -2$
 - $x = \frac{2}{3}$ dan $x = -4$
 - $x = 2$ dan $x = -\frac{4}{3}$
- Untuk $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ mempunyai nilai stasionernya sama dengan
 - 2 dan 4
 - 35
 - 1
 - 21 dan 87
 - 21 dan -77
- Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ adalah
 - (0, 6)
 - (2, 12)
 - (2, 14)
 - (12, 2)
 - (14, 2)
- Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan $x^2 - (a-1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^3$ dicapai untuk $a = \dots$
 - 1 dan 2
 - 1 dan 3
 - 2 dan 3
 - 1
 - 0 dan -1
- Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ mencapai
 - minimum di (-1, 7)
 - minimum di (0, 2)
 - maksimum di (0, 2)
 - maksimum di (-1, 7)
 - maksimum di (3, -25)
- Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (x_0, y_0) , maka $x_0 = \dots$
 - 1
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
- Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ dalam interval $-3 \leq x \leq 4$ adalah
 - 160
 - 155
 - 131
 - 99
 - 11
- Sebuah titik materi dengan persamaan $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ ($t =$ waktu dan $s =$ kedudukan). Titik materi ini mempunyai kecepatan tertinggi pada saat $t = \dots$
 - 1

- B. 2
C. 3
D. 4
E. 5
9. Selisih dua bilangan adalah $4p$. Nilai terkecil dari hasil perkalian kedua bilangan itu adalah
A. $6p^2$
B. $4p^2$
C. $-2p^2$
D. $-4p^2$
E. $-5p^2$
10. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx - 5$ mempunyai koordinat titik balik minimum di $(2, -9)$. Nilai $a + b = \dots$
A. -1
B. -2
C. -3
D. -4
E. -5
11. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar dibawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah
A. 16 m
B. 18 m
C. 20 m
D. 22 m
E. 24 m
- 
12. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam dengan biaya per jam $4x - 800 + \frac{120}{x}$ dalam ratus ribu rupiah. Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu
A. 40 jam
B. 100 jam
C. 110 jam
D. 120 jam
E. 150 jam
13. Luas permukaan balok dengan alas persegi adalah 150 cm^2 . Agar diperoleh volume balok yang maksimum, panjang alas balok adalah
A. 3 cm
B. 5 cm
C. 6 cm
D. 15 cm
E. 25 cm
14. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya $(9.000 + 1.000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah
A. Rp149.000,00
B. Rp249.000,00
C. Rp391.000,00
D. Rp609.000,00
E. Rp757.000,00

15. Dua bilangan m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah
- A. 320
 - B. 295
 - C. 280
 - D. 260
 - E. 200

Pembahasan Soal Latihan Kegiatan Pembelajaran 2

1. Nilai stasioner dari fungsi $y = x^3 - x^2 - 8x$ diperoleh pada

Jawaban: E

Penyelesaian:

Syarat fungsi stasioner adalah $f'(x) = 0$, sehingga kita turunkan fungsi y pada soal diatas:

$$y = x^3 - x^2 - 8x$$

$$y' = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (\text{faktorkan})$$

$$\Leftrightarrow (3x + 4)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ dan } x = 2$$

2. Untuk $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ mempunyai nilai stasionernya sama dengan

Jawaban: D

Penyelesaian:

$$y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$$

Nilai dan titik stasioner didapat jika $y' = 0$

$$y' = 0$$

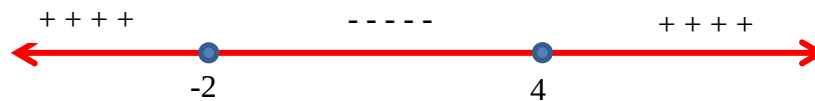
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ atau } x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ atau } x = -2$$



Fungsi maksimum pada $x = -2$, maka nilai balik maksimumnya:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) - 7 \\ &= -8 - 12 + 48 - 7 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Fungsi minimum pada $x = 4$, maka nilai balik minimumnya:

$$\begin{aligned} f(4) &= (4)^3 - 3(4)^2 - 24(4) - 7 \\ &= 64 - 48 - 96 - 7 \\ &= -87 \end{aligned}$$

Jadi, nilai stasionernya adalah 21 dan -87.

3. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$ adalah

Jawaban: C

Penyelesaian:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

syarat stasioner $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2) + 6 = 14$$

Jadi, titik stasionernya adalah (2, 14).

4. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan $x^2 - (a - 1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^3$ dicapai untuk $a = \dots$

Jawaban: B

Penyelesaian:

$$x^2 - (a-1)x + a = 0$$

$$A = 1, B = -(a-1), C = a$$

Jika akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah x_1 dan x_2 maka

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = (a-1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} = a$$

$$x_1^3 + 3x_1 \cdot x_2 + x_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 \cdot x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) + 3x_1 \cdot x_2$$

$$= (a-1)^3 - 3a(a-1) + 3a$$

$$= (a-1)^3 - 3a^2 + 6a$$

Stasioner jika turunan pertama = 0

$$\text{Andai } p(a) = (a-1)^3 - 3a^2 + 6a$$

$$\text{maka } p' = 3(a-1)^2 - 6a + 6 = 0$$

$$(a-1)^2 - 2a + 2 = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - 2a + 2 = 0$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a-1)(a-3) = 0$$

$$a-1 = 0 \text{ atau } a-3 = 0$$

$$a = 1 \text{ atau } a = 3$$

5. Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ mencapai

Jawaban: D

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \text{ maka}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

- ❖ Syarat stasioner

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 3$$

- ❖ Menentukan nilai stasioner

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = 7$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 2 = -25$$

- ❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$$f'(-2) = 15, f'(0) = -9, \text{ dan } f'(4) = 15$$



- ❖ Kesimpulan

- $f(-1) = 7$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke - (negatif)
- $f(3) = -25$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari - (negatif) ke + (positif).

6. Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (x_0, y_0) , maka $x_0 = \dots$

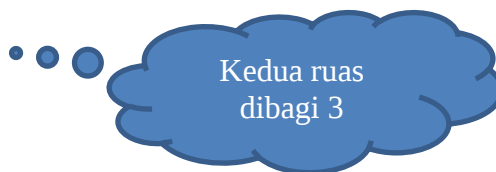
Jawaban: D

Penyelesaian:

$$y = 2x^5 - 5x^4 + 20, \text{ maka}$$

$$y' = 10x^4 - 20x^3$$

Syarat stasioner $y' = 0$, maka



$$10x^4 - 20x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x^3(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0)^5 - 5(0)^4 + 20 = 20$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^5 - 5(2)^4 + 20 = 4$$

Jadi, kurva mencapai nilai minimum di $x_0 = 2$.

7. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$ dalam interval $-3 \leq x \leq 4$ adalah

Jawaban: B

Penyelesaian:

- ❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5, \text{ maka}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 48$$

$$= 6(x^2 - 2x - 8)$$

$$= 6(x + 2)(x - 4)$$

- ❖ Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[-3, 4]$, yaitu

1. Titik ujung interval, $x = -3$ dan $x = 4$

2. Titik stasioner

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 4$$

3. Tidak ada titik singular

- ❖ Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 48x + 5$
$x = -3$	$f(-3) = 2(-3)^3 - 6(-3)^2 - 48(-3) + 5 = 41$
$x = -2$	$f(-2) = 2(-2)^3 - 6(-2)^2 - 48(-2) + 5 = 61$
$x = 4$	$f(4) = 2(4)^3 - 6(4)^2 - 48(4) + 5 = -155$

- ❖ Kesimpulan

➤ $f(-2) = 61$ merupakan nilai maksimum

➤ $f(4) = -155$ merupakan nilai minimum

8. Sebuah titik materi dengan persamaan $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (t = waktu dan s = kedudukan). Titik materi ini mempunyai kecepatan tertinggi pada saat $t = \dots$

Jawaban: A

Penyelesaian:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$$

$$\text{kecepatan } v(t) = s'(t)$$

$$v(t) = -3t^2 + 6t - 5$$

$$v(t) \text{ maksimum diperoleh saat } v'(t) = 0$$

$$v'(t) = -6t + 6 = 0$$

$$t = 1$$

Jadi, $v(t)$ maksimum diperoleh saat $t = 1$.

9. Selisih dua bilangan adalah $4p$. Nilai terkecil dari hasil perkalian kedua bilangan itu adalah

Jawaban: D

Penyelesaian:

Misalkan dua bilangan itu adalah x dan y , maka:

$$x - y = 4p$$

$$y = x - 4p$$

Perkalian bilangan tersebut

$$z = xy$$

$$= x(x - 4p)$$

$$= x^2 - 4xp$$

Perkalian tersebut akan minimum jika turunan pertama dari $z = x^2 - 4xp$ sama dengan nol.

$$z = x^2 - 4xp$$

$$z' = 2x - 4p = 0$$

$$2x = 4p$$

$$x = 2p$$

Untuk $x = 2p$ maka $y = 2p - 4p = -2p$, sehingga hasil perkalian minimumnya adalah:

$$z = xy = 2p(-2p) = -4p^2$$

10. Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx - 5$ mempunyai koordinat titik balik minimum di $(2, -9)$. Nilai $a+b = \dots$

Jawaban: C

Penyelesaian:

Substitusi titik $(2, -9) = (x, y)$ ke fungsi $f(x)$

$$f(x) = ax^2 + bx - 5$$

$$-9 = a(2)^2 + b(2) - 5$$

$$4a + 2b = -4 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Karena f mencapai nilai balik minimum di $x = 2$, maka :

$$f'(2) = 0$$

$$2a(2) + b = 0$$

$$4a + b = 0 \quad (2)$$

Eliminasi (1) dan (2) diperoleh

$$4a + 2b = -4$$

$$4a + b = 0$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \quad \text{dikurangi}$$

$$b = -4$$

Untuk $b = -4$ maka $4a + (-4) = 0$

$$4a = 4$$

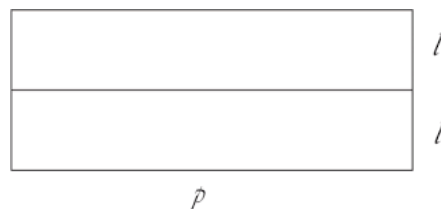
$$a = 1$$

Jadi, $a + b = 1 + (-4) = -3$

11. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar dibawah ini. Agar luasnya maksimum panjang kerangka (p) tersebut adalah

Jawaban: C

Penyelesaian:



Persamaan kerangka :

$$3p + 4l = 120$$

$$4l = 120 - 3p \quad (\text{masing-masing dibagi 4})$$

$$l = 30 - \frac{3}{4}p$$

Persamaan luas :

$$L = p \times 2l$$

$$= p \times 2 \left(30 - \frac{3}{4}p \right)$$

$$= 60p - \frac{3}{2}p^2$$

Luas akan maksimum jika :

$$L' = 0$$

$$60 - 3p = 0$$

$$60 = 3p$$

$$3p = 60$$

$$p = 20$$

Jadi, panjang kerangka agar luas maksimum adalah 20 m.

12. Suatu perusahaan menghasilkan produk yang dapat diselesaikan dalam x jam dengan biaya per jam $4x - 800 + \frac{120}{x}$ dalam ratus ribu rupiah. Agar biaya minimum, produk tersebut dapat diselesaikan dalam waktu

Jawaban: B

Penyelesaian:

Biaya per jam : $4x - 800 + \frac{120}{x}$

Biaya untuk x jam :

$$B(x) = x(4x - 800 + \frac{120}{x})$$

$$= 4x^2 - 800x + 120$$



Biaya akan minimum jika :

$$B'(x) = 0$$

$$8x - 800 = 0$$

$$x = 100$$

Jadi, waktu yang diperlukan agar biaya minimum adalah 100 jam.

13. Luas permukaan balok dengan alas persegi adalah 150 cm^2 . Agar diperoleh volume balok yang maksimum, panjang alas balok adalah

Jawaban: B

Penyelesaian:

Misal p = panjang balok, l = lebar balok, dan t = tinggi balok, L = luas permukaan balok, dan V = volume balok

Karena alas berbentuk persegi, maka $p = l$

$$L = 150$$

$$2(pl + pt + lt) = 150$$

$$pl + pt + lt = 75$$

$$p^2 + pt + pt = 75$$

(karena $p = l$)

$$2pt = 75 - p^2$$

$$t = \frac{75 - p^2}{2p}$$

$$V = plt$$

$$= p^2 t$$

(karena $p = l$)

$$= p^2 \left(\frac{75 - p^2}{2p} \right)$$

$$= \frac{75p^2 - p^4}{2p}$$

$$= \frac{75}{2}p - \frac{1}{2}p^3$$

Volume akan maksimum jika $V' = 0$, diperoleh

$$\frac{75}{2} - \frac{3}{2}p^2 = 0$$

$$75 - 3p^2 = 0$$

$$3p^2 = 75$$

$$p^2 = 25$$

$$p = 5$$

Jadi, volume akan maksimum jika panjang alas balok 5 cm.

14. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya $(9.000 + 1.000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah

Jawaban: C

Penyelesaian:

Biaya produksi x produk adalah $9.000 + 1.000x + 10x^2$

Biaya penjualan 1 produk adalah 5.000

Jadi, biaya penjualan x produk adalah $5.000x$

Laba = Biaya penjualan - Biaya produksi

$$L(x) = 5.000x - (9.000 + 1.000x + 10x^2)$$

$$\begin{aligned} &= 5.000x - 9.000 - 1.000x - 10x^2 \\ &= -10x^2 + 4.000x - 9.000 \end{aligned}$$

Laba akan maksimum, jika :

$$L'(x) = 0$$

$$-20x + 4.000 = 0$$

$$x = 200$$

Jadi, laba akan maksimum jika perusahaan menghasilkan 200 produk, dengan laba maksimumnya adalah :

$$\begin{aligned} L(200) &= -10(200)^2 + 4.000(200) - 9.000 \\ &= -400.000 + 800.000 - 9.000 \\ &= 391.000 \end{aligned}$$

15. Dua bilangan m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah

Jawaban: A

Penyelesaian:

Diketahui $2m - n = 40$

$$n = 2m - 40$$

$$\begin{aligned} p &= m^2 + n^2 \\ &= m^2 + (2m - 40)^2 \\ &= m^2 + 4m^2 - 160m + 1600 \\ &= 5m^2 - 160m + 1600 \end{aligned}$$

p akan minimum jika :

$$p' = 0$$

$$10m - 160 = 0$$

$$m = 16$$

$$n = 2m - 40$$

$$= 2(16) - 40$$

$$= -8$$

Jadi, nilai minimum p adalah

$$\begin{aligned} p &= m^2 + n^2 \\ &= 16^2 + (-8)^2 \\ &= 320 \end{aligned}$$

E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang Anda ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai dan titik stasioner fungsi aljabar ?		
2.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi aljabar dengan uji turunan pertama?		
3.	Apakah Ananda mampu menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi aljabar pada interval tertutup?		
4.	Apakah Ananda mampu membuat model dari permasalahan kontekstual atau dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan maksimum dan minimum?		
5.	Apakah Ananda mampu menyelesaikan permasalahan kontekstual atau dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan maksimum dan minimum?		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,

Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini, diharapkan Ananda dapat menggambar grafik fungsi Aljabar.

B. Uraian Materi

Dengan materi prasyarat yang mencukupi yaitu menentukan turunan pertama dari suatu fungsi yang diberikan, fungsi naik, fungsi turun dan stasioner, Ananda dapat memulai modul tersebut.

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi aljabar:

- ❖ Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
 - a. Titik potong dengan sumbu- x , syarat $y = 0$
 - b. Titik potong dengan sumbu- y , syarat $x = 0$
- ❖ Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- ❖ Tentukan selang tempat fungsi naik atau turun.
- ❖ Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

Contoh

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$.

Penyelesaian :

1. Titik-titik potong terhadap :

$$\begin{aligned} \text{a. sumbu } x, \text{ syarat } y = 0, \text{ maka : } & \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & x \left(\frac{1}{3}x^2 - x - 8 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ atau } \frac{1}{3}x^2 - x - 8 = 0 \text{ (dikali 3)}$$

$$x = 0 \text{ atau } x^2 - 3x - 24 = 0$$

Diketahui : $a = 1, b = -3, c = -24$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 96}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{2}$$

Pake
rumus
kuadrat

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 10,25}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 10,25}{2} = \frac{13,25}{2} = 6,625$$

$$x_2 = \frac{3 - 10,25}{2} = \frac{-7,05}{2} = -3,525$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 6,62 \text{ atau } x = -3,62$$

Jadi diperoleh titik potong $(0, 0)$, $(6,62; 0)$, dan $(-3,62; 0)$

b. sumbu y , syarat $x = 0$, maka : $y = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 8(0) = 0$ diperoleh titik $(0, 0)$

2. Titik-titik stasioner ($f'(x) = 0$)

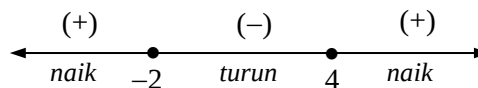
$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) = 0$$

sehingga absis titik stasioner $x = -2$ dan $x = 4$

$$\text{untuk } x = -2, \text{ maka } y = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 8(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 16 = 9\frac{1}{3}$$

$$\text{untuk } x = 4, \text{ maka } y = f(4) = \frac{1}{3}(4)^3 - (4)^2 - 8(4) = \frac{64}{3} - 16 - 32 = -26\frac{2}{3}$$

Jenis stasioner :



Untuk $x = -2$, terdapat titik balik maksimum, yaitu $(-2, 9\frac{1}{3})$, dan

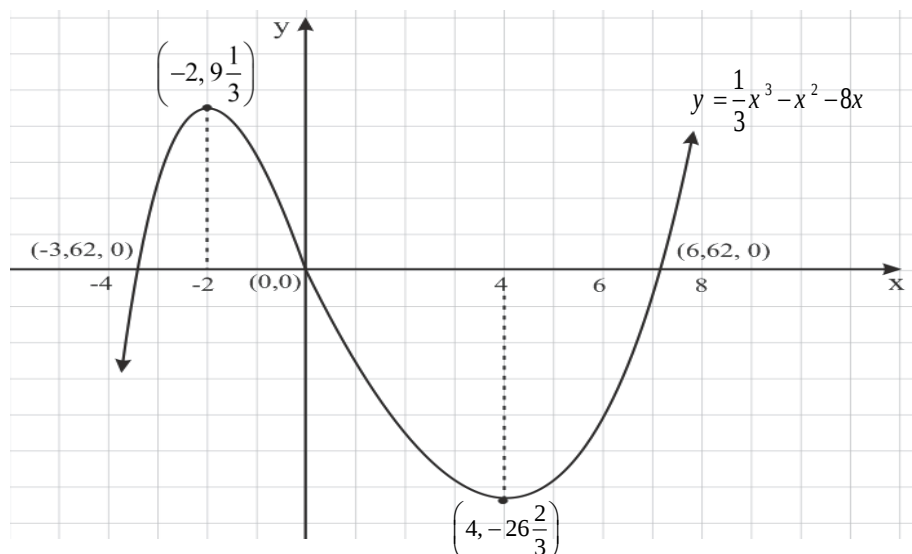
Untuk $x = 4$, terdapat titik balik minimum, yaitu $(4, -26\frac{2}{3})$

3. $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 4$

$f(x)$ turun pada interval $-2 < x < 4$

4. Jika diperlukan, tentukan dua titik lagi. Misalnya, $x = 7$ (di sebelah kanan titik potong) dan $x = -4$ (di sebelah kiri titik potong).

5. Gambarkan semua titik yang diperoleh dari hasil perhitungan di atas pada bidang cartesius, kemudian hubungkan semua titik-titik tersebut sehingga diperoleh kurva berikut.



C. Rangkuman

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi suku banyak :

- ❖ Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
 - Titik potong dengan sumbu x , syarat $y = 0$
 - Titik potong dengan sumbu y , syarat $x = 0$
- ❖ Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- ❖ Tentukan selang tempat *fungsi* naik atau turun.
- ❖ Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

D. Latihan Soal

Sebagai latihan Ananda, coba gambarlah sketsa grafik : (Gunakan langkah-langkah sesuai contoh soal yaa)

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$
2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$

Penyelesaian:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

(skor 50)

- ❖ Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

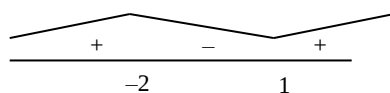
- Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$
 $y = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 12(0) + 7 = 7 \Rightarrow (0, 7)$
- Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$
 $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x + 7)(x - 1)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \text{ atau } x = 1$
 $\Rightarrow (-\frac{7}{2}, 0) \text{ dan } (1, 0)$

- ❖ Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 1$$



Jadi, fungsi naik pada interval $x < -2$ atau $x > 1$

dan turun pada interval $-2 < x < 1$.

- ❖ Tentukan titik-titik kritis.

$$x = -2 \Rightarrow y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 7 = 27$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 7 = 0$$

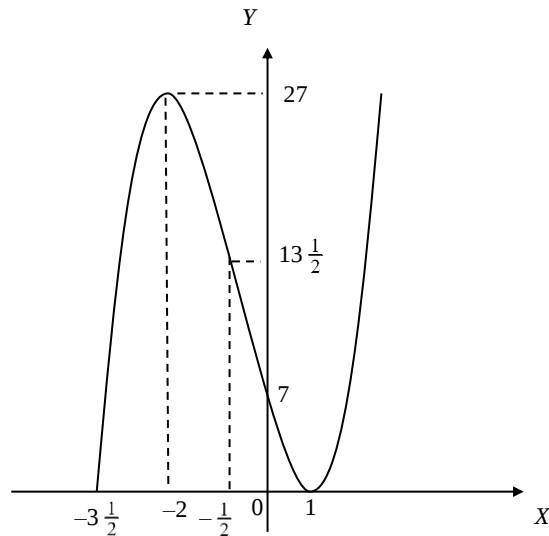
Jadi, titik balik minimum $(1, 0)$ dan titik balik maksimum $(-2, 27)$

- ❖ Tentukan beberapa titik bantu lainnya

$$x = -1 \Rightarrow y = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) + 7 = 20 \Rightarrow (-1, 20)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) + 7 = 11 \Rightarrow (2, 11)$$

❖ Sketsa grafik.



2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$

(skor 50)

❖ Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

➤ Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$

$$y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8 \Rightarrow (0, 8)$$

➤ Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$

$$8 + 2x^2 - x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ atau } x^2 = -2 \text{ (tidak memenuhi)}$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 2$$

$$\Rightarrow (-2, 0) \text{ dan } (2, 0)$$

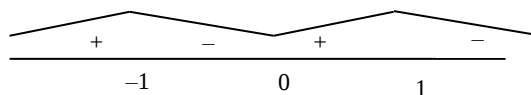
❖ Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 4x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(1 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(1 - x)(1 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 0 \text{ atau } x = 1$$

Jadi, fungsi naik pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$ dan turun pada interval $-1 < x < 0$ atau $x > 1$.

❖ Tentukan titik-titik kritis.

$$x = -1 \Rightarrow y = 8 + 2(-1)^2 - (-1)^4 = 9$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 8 + 2(1)^2 - (1)^4 = 9$$

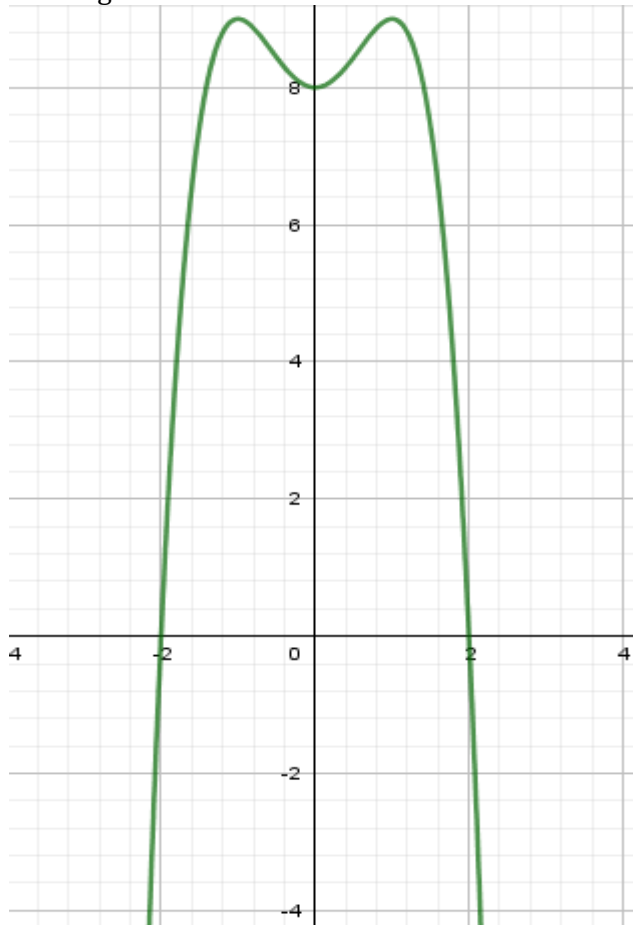
Jadi, titik balik maksimum $(-1, 9)$ dan $(1, 9)$ dan titik balik minimum $(0, 8)$

❖ Tentukan beberapa titik bantu lainnya

$$x = -3 \Rightarrow y = 8 + 2(-3)^2 - (-3)^4 = -55$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 8 + 2(3)^2 - (3)^4 = -55$$

❖ Sketsa grafik.



E. Penilaian Diri

Ananda isilah pertanyaan pada tabel di bawah ini sesuai dengan yang kalian ketahui, berilah penilaian secara jujur, objektif, dan penuh tanggung jawab dengan memberi tanda centang pada kolom pilihan.

No.	Pertanyaan	Jawaban	
		Ya	Tidak
1.	Apakah Ananda mampu menggambar grafik fungsi Aljabar dengan menggunakan langkah-langkah yang telah ditulis?		
2.	Apakah Ananda mampu menggambar grafik fungsi Aljabar ke dalam grafik cartesius?		

Catatan:

Bila ada jawaban "Tidak", maka segera lakukan review pembelajaran,

Bila semua jawaban "Ya", maka Anda dapat melanjutkan ke pembelajaran berikutnya.

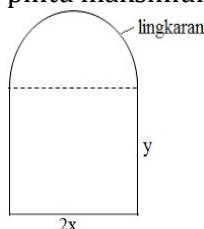
EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat.

1. Gradien garis singgung kurva $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ di titik $(1, 4)$ adalah
 - A. -3
 - B. -1
 - C. 0
 - D. 1
 - E. 3
2. Persamaan garis singgung kurva $y = x\sqrt{2x}$ dititik pada kurva dengan absis 2 adalah
 - A. $y = 3x - 2$
 - B. $y = 3x + 2$
 - C. $y = 3x - 1$
 - D. $y = -3x + 2$
 - E. $y = -3x + 1$
3. Garis singgung pada kurva $y = \frac{2x+1}{2-3x}$ di titik $(1, -3)$ adalah
 - A. $y + 7x - 10 = 0$
 - B. $y - 7x + 10 = 0$
 - C. $7y + x + 20 = 0$
 - D. $7y - x - 20 = 0$
 - E. $7y - x + 20 = 0$
4. Koorditan titik-titik singgung pada kurva $y = x^2(2x - 3)$ yang garis singgungnya sejajar dengan garis $2y - 24x = 1$ adalah
 - A. $(1, 5)$ dan $(-2, -4)$
 - B. $(-1, 5)$ dan $(-2, -4)$
 - C. $(-1, -5)$ dan $(2, 4)$
 - D. $(1, -5)$ dan $(2, 4)$
 - E. $(1, 5)$ dan $(2, 4)$
5. Kurva $y = 2x^2 - 3x + 3$ bersinggungan dengan garis $y = 5x - 5$. Persamaan garis normalnya adalah
 - A. $5x - y = 0$
 - B. $x - 5y - 1 = 0$
 - C. $x + 5y - 1 = 0$
 - D. $x - 5y + 23 = 0$
 - E. $x + 5y - 27 = 0$
6. Fungsi $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ akan naik pada interval
 - A. $x > 2$
 - B. $x > 3$
 - C. $x > 4$
 - D. $x < 2$
 - E. $x < 4$
7. Batas nilai p agar fungsi $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + px^2 + 2px + 5$ selalu turun untuk semua nilai x bilangan real adalah
 - A. $p < -2$ atau $p > 0$
 - B. $-2 \leq p \leq 0$
 - C. $-2 < p < 0$
 - D. $-2 \leq p < 0$
 - E. $-2 < p \leq 0$

8. Grafik fungsi $f(x) = x\sqrt{x-2}$ naik untuk nilai x yang memenuhi
- $2 < x < 3$
 - $3 < x < 4$
 - $2 < x < 4$
 - $x > 4$
 - $x > 2$
9. Fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ turun pada interval
- $-2 < x < 2$
 - $0 < x < 4$
 - $2 < x < 6$
 - $-4 < x < 0$
 - $4 < x < 8$
10. Agar grafik fungsi $y = x^3 - 3x^2 - ax$ naik hanya pada interval $x < -2$ atau $x > 4$, maka nilai a harus sama dengan
- 48
 - 24
 - 12
 - 8
 - 4
11. Titik stasioner untuk fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$ adalah
- (3, 4)
 - (3, -4)
 - (-3, 4)
 - (-3, -4)
 - (0, 5)
12. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ adalah
- 15 dan 17
 - 15 dan -17
 - 15 dan 17
 - 15 dan -17
 - 15
13. Koordinat titik stasioner dari fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ adalah
- (1, -1) dan (3, 5)
 - (1, -1) dan (3, -5)
 - (1, 1) dan (3, 5)
 - (1, -1) dan (-3, 5)
 - (1, -1) dan (3, -5)
14. Fungsi $y = ax^3 + bx^2$ dengan a dan b konstan. Jika nilai stasioner di $x = 1$ adalah -1, maka nilai $a - b$ adalah
- 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
15. Fungsi $f(x) = x^3 + px^2 + 9x - 18$ mempunyai nilai stasioner untuk $x = 3$. Nilai $p =$
- 6
 - 4
 - 3
 - 4
 - 6
16. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka $p =$
- 3

- B. 4
C. 5
D. 7
E. 8
17. Diketahui fungsi f yang dirumuskan sebagai $f(x) = x^3 - 12x^2$. Nilai maksimum fungsi f dalam interval $-1 \leq x \leq 5$ adalah
A. -175
B. -128
C. -13
D. 0
E. 128
18. Sebidang tanah akan dibatasi oleh pagar dengan menggunakan kawat berduri seperti pada gambar. Batas tanah yang dibatasi pagar adalah yang tidak bertembok. Kawat yang tersedia 800 meter. Berapakah luas maksimum yang dapat dibatasi oleh pagar yang tersedia?
A. 80.000 m²
B. 40.000 m²
C. 20.000 m²
D. 5.000 m²
E. 2.000 m²
19. Sebuah tabung tanpa tutup yang terbuat dari lempengan tipis dapat memuat air sebanyak 27π cm³. Luas permukaan tabung akan minimum jika jari-jari tabung sama dengan
A. 9 cm
B. 8 cm
C. 6 cm
D. 4 cm
E. 3 cm
20. Sebuah akuarium tanpa tutup memiliki alas berbentuk persegi panjang dengan perbandingan panjang dan lebarnya 2 : 3. Jika luas permukaan akuarium adalah 1.800 cm², volume maksimum akuarium tersebut adalah
A. 3.600 cm³
B. 5.400 cm³
C. 6.300 cm³
D. 7.200 cm³
E. 8.100 cm³
21. Sebuah pintu berbentuk seperti tergambar. Keliling pintu sama dengan p . Agar luas pintu maksimum, maka x sama dengan



- A. $\frac{p}{4+\pi}$
B. $\frac{p}{4-\pi}$
C. p
D. $4 - x$
E. $4 - p$
22. Kebun Pak Jaya berbentuk persegi panjang dengan keliling 60 meter. Jika panjangnya x meter dan lebarnya y meter, maka luas maksimum kebun Pak Jaya adalah
A. 120

- B. 150
 - C. 225
 - D. 250
 - E. 300
23. Selembar karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 dm dan panjang 8 dm akan dibuat kotak tanpa tutup. Pada keempat pojok karton dipotong persegi yang sisinya x dm. Ukuran kotak tersebut (panjang, lebar, tinggi) agar volume maksimum berturut-turut adalah
- A. 10 dm, 7 dm, 1 dm
 - B. 8 dm, 5 dm, 1 dm
 - C. 7 dm, 4 dm, 2 dm
 - D. 7 dm, 4 dm, 1 dm
 - E. 6 dm, 3 dm, 1 dm
24. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal V_0 m/detik. Tinggi peluru setelah t detik dinyatakan dengan fungsi $h(t) = 100 + 40t - 4t^2$. Tinggi maksimum yang dapat dicapai peluru tersebut adalah
- A. 160 m
 - B. 200 m
 - C. 340 m
 - D. 400 m
 - E. 800 m
25. Seorang petani menyemprotkan obat pembasmi hama pada tanamannya. Reaksi obat tersebut t jam setelah disemprotkan dinyatakan dengan rumus $f(t) = 15t^2 - t^3$. Reaksi maksimum tercapai setelah
- A. 3 jam
 - B. 5 jam
 - C. 10 jam
 - D. 15 jam
 - E. 30 jam

Kunci Jawaban Evaluasi

1. E
2. A
3. B
4. C
5. E
6. A
7. C
8. E
9. B
10. B
11. B
12. B
13. E
14. D
15. A
16. D
17. D
18. D
19. E
20. D
21. A
22. C
23. E
24. B
25. C

DAFTAR PUSTAKA

- Manullang, Sudioanto, dkk. 2017. *Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Purcell, E.J., dan Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.
- Siswanto. 2005. *Matematika Inovatif: Konsep dan Aplikasinya*. Solo: Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.
- Sobirin. 2008. *Fokus Matematika Siap Ujian Nasional untuk SMA/MA*. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, James. 2001. *Kalkulus Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.
- Willa Adrian. 2008. *1700 Bank Soal Bimbingan Pemantapan Matematika Dasar*. Bandung: Yrama Widya.
- <https://soalkimia.com/contoh-soal-aplikasi-turunan/>
- <https://mathcyber1997.com/soal-dan-pembahasan-aplikasi-turunan-diferensial/>
- <https://smatika.blogspot.com/2016/10/pembahasan-soal-ujian-nasional-aplikasi.html>
- <https://www.materimatematika.com/2017/10/fungsi-naik-dan-fungsi-turun.html>
- <https://rumusbilangan.com/titik-stasioner/>
- <https://www.madematika.net/2017/02/menentukan-nilai-stasioner-suatu-fungsi.html>
- <http://ilmuku-duniaku14.blogspot.com/2018/07/soal-dan-pembahasan-menentukan-titik.html>